

OPTIMALE STEUERUNG KOMPLEXER PROZESSE

Peter Benner

Professur Mathematik in Industrie und Technik
Fakultät für Mathematik
Technische Universität Chemnitz



MPI für Dynamik komplexer technischer Systeme, Magdeburg
Kuratoriumssitzung, 3. Dezember 2009

- 1 Optimale Steuerung
- 2 Regelung
- 3 Beispiele
- 4 Modellreduktion als Schlüsseltechnologie

Optimale Steuerung

dient der **Optimierung dynamischer Prozesse**,

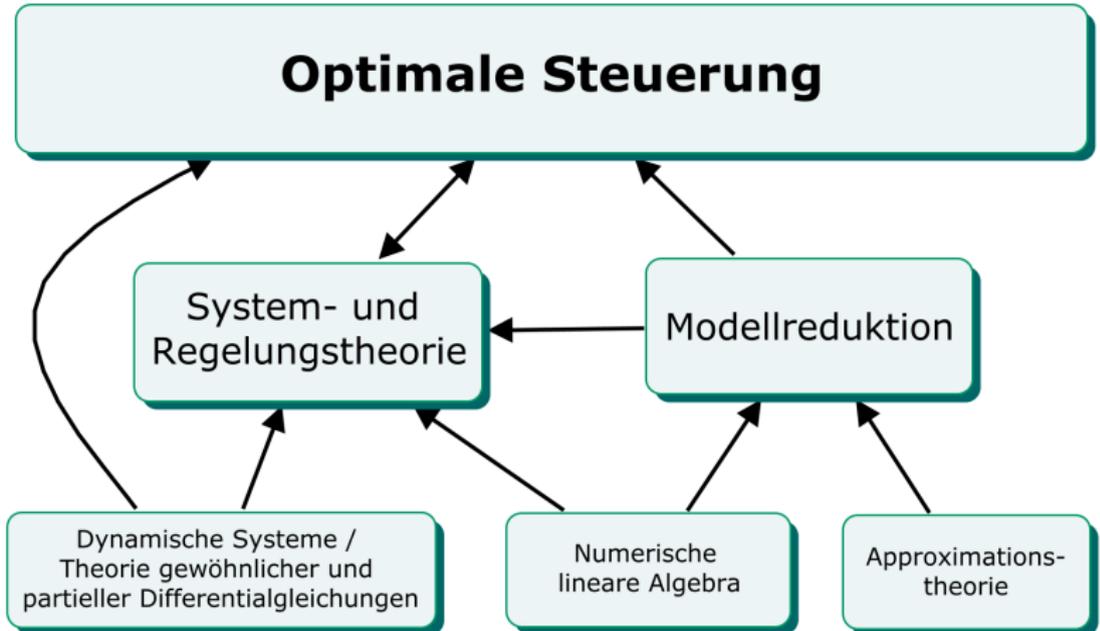
die durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen beschrieben werden,

wobei ein **Kostenfunktional** minimiert wird

(z.B. Energiekosten, Abweichung von vorgegebener
Route/Bahnkurve \equiv Trajektorie),

so dass ein vorgegebenes Ziel
in einer bestimmten oder **minimaler Zeit**
erreicht wird,

unter Einhaltung von Grenzwerten für die Zustandsgrößen bzw.
von Beschränkungen der Steuergrößen.



Das Pontryaginsche Minimumprinzip

[BOLTYANSKII/GAMKRELIDZE/PONTRYAGIN 1960]

Es sei $(x^*, u^*) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times U$ eine optimale Lösung des Optimalsteuerungsproblems

$$\text{Minimiere } F(x, u) = g(x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

$$\text{unter } \dot{x} = f(t, x, u) \quad \text{für } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0, \quad \psi(x(T)) = 0,$$

$$u(t) \in U, \quad U \subset \mathbb{R}^m \text{ nichtleer, konvex, abgeschlossen,}$$

wobei die Matrix $\psi_x(x^*(T))$ vollen Rang habe. Weiterhin sei die zugehörige **Hamilton-Funktion**

$$H(t, x, \lambda, u) := \lambda_0 f_0(t, x, u) + \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle = \lambda_0 f_0(t, x, u) + \lambda^\top f(t, x, u).$$

Dann existieren $\lambda_0 \geq 0$ und eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und ein Vektor $\nu \in \mathbb{R}^r$ mit $(\lambda_0, \lambda(t), \nu) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$, sodass die folgenden Aussagen gelten:

- (i) An allen Stetigkeitsstellen $t \in [0, T]$ von $u^*(\cdot)$ gilt die **Minimumbedingung**

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \min_{u \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), u).$$

- (ii) An allen Stetigkeitsstellen $t \in [0, T]$ von $u^*(\cdot)$ gilt die **adjungierte Differentialgleichung**

$$\dot{\lambda}(t)^\top = -H_x(t, x^*(t), \lambda(t), u^*(t)).$$

- (iii) Im Endzeitpunkt T gilt die **Transversalitätsbedingung**

$$\lambda(T)^\top = \lambda_0 g_x(x^*(T)) + \nu^\top \psi_x(x^*(T)).$$

- (iv) Im Falle freier Endzeit gilt für die optimale Endzeit T^*

$$H(T^*, x^*(T^*), \lambda(T^*), u^*(T^*)) = 0.$$

- (v) Für autonome Systeme (also $H(t, x, \lambda, u) \equiv H(x, \lambda, u)$) gilt außerdem

$$H(x^*(t), \lambda(t), u^*(t)) = \text{const in } [0, T]$$

Optimale Steuerung komplexer Prozesse

Peter Benner

Optimale Steuerung

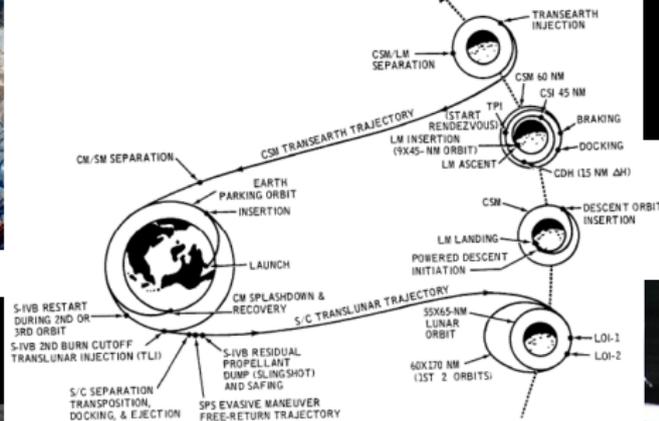
Regelung

Beispiele

Schlüssel-technologie MOR



APOLLO 11 FLIGHT PROFILE



Bildnachweise:

Mitte [Apollo 11 Mission Operations report, http://history.nasa.gov/alsj/a11/A11_MissionOpReport.pdf](http://history.nasa.gov/alsj/a11/A11_MissionOpReport.pdf)

Li./re., oben [http://de.wikipedia.org/wiki/Apollo_11,](http://de.wikipedia.org/wiki/Apollo_11)

Li./re., unten NASA photo IDs AS11-44-6552, S69-42583.

Wichtige Beobachtung

Optimierte Lösungstrajektorie $x_*(t; u_*)$ und vorberechnete Steuerung $u_*(t)$ können in der Realität nicht eingehalten werden wegen

- Modellierungsfehlern bzw. nicht modellierter Dynamik,
- Modellunsicherheiten,
- äußeren Störungen,
- Messfehlern und -ungenauigkeiten.

Konsequenz: Benötigte Regelung ("Feedback")

$$u(t) = u_*(t) + U(t, x(t) - x_*(t)).$$

Wichtige Beobachtung

Optimierte Lösungstrajektorie $x_*(t; u_*)$ und vorberechnete Steuerung $u_*(t)$ können in der Realität nicht eingehalten werden wegen

- Modellierungsfehlern bzw. nicht modellierter Dynamik,
- Modellunsicherheiten,
- äußeren Störungen,
- Messfehlern und -ungenauigkeiten.

Konsequenz: Benötigte Regelung ("Feedback")

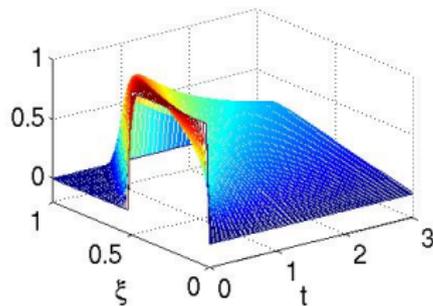
$$u(t) = u_*(t) + U(t, x(t) - x_*(t)).$$

Beispiel: Optimale Steuerung eines einfachen Strömungsmodells

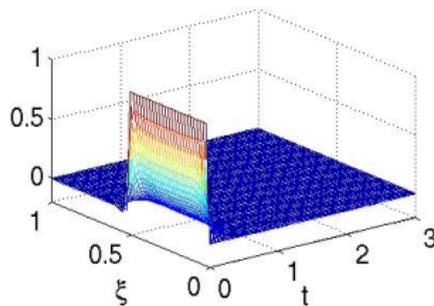
Burgersgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t x(t, \xi) &= \nu \partial_{\xi\xi} x(t, \xi) - x(t, \xi) \partial_{\xi} x(t, \xi) + B(\xi)u(t) + F(\xi)v(t), \\ x(t, 0) &= x(t, 1) = 0, \quad x(0, \xi) = x_0(\xi) + \eta(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \\ y(t, \xi) &= Cx(t, \xi) + w(t, \xi). \end{aligned}$$

Uncontrolled state



Open-loop state

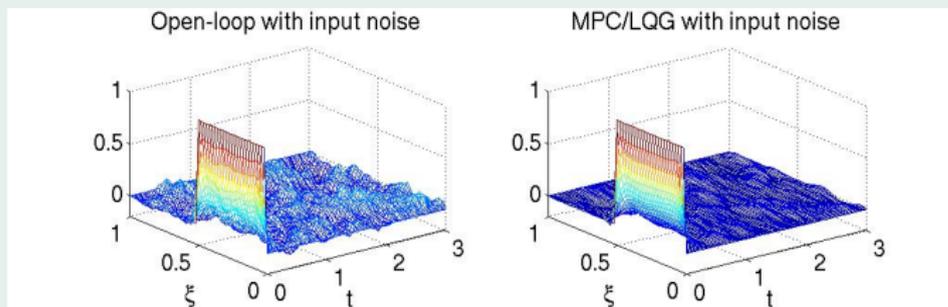


Beispiel: Optimale Steuerung eines einfachen Strömungsmodells

Burgersgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t x(t, \xi) &= \nu \partial_{\xi\xi} x(t, \xi) - x(t, \xi) \partial_{\xi} x(t, \xi) + B(\xi)u(t) + F(\xi)v(t), \\ x(t, 0) &= x(t, 1) = 0, \quad x(0, \xi) = x_0(\xi) + \eta(\xi), \quad \xi \in (0, 1), \\ y(t, \xi) &= C x(t, \xi) + w(t, \xi). \end{aligned}$$

Nichtlineare Regelung (hier: MPC-LQG):



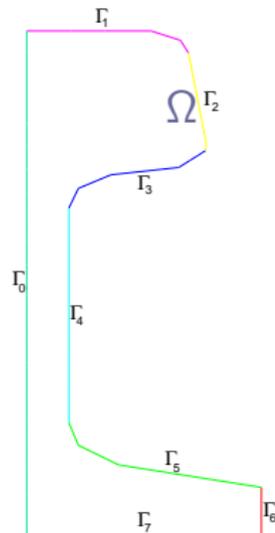
Reduktion des Folgefehlers $\int_0^T \|x(t) - x_*(t)\|_2^2 dt$ um Faktor > 10 .

[BENNER/GÖRNER, PAMM 2006]; [BENNER/GÖRNER/SAAK, Springer LNCSE 2006].

- **Mathematisches Modell:** Randsteuerung für nichtlineare 2D Wärmeleitung,

$$\begin{aligned}
 c(\Theta)\rho(\Theta)\partial_t\Theta &= \nabla \cdot (\lambda(\Theta)\nabla\Theta) \text{ in } [0, t_f] \times \Omega, \\
 \lambda(\Theta)\partial_\nu\Theta &= \alpha(\Theta - \Theta_{ext}) + \beta(\Theta^4 - \Theta_{ext}^4) \\
 &\quad \text{auf } \Gamma_k, \quad k = 1, \dots, 7, \\
 \partial_n\Theta &= 0 \text{ auf } \Gamma_8.
 \end{aligned}$$

- λ, c, ρ : linear-affine Funktionen, gültig für **Austenit-Phase**; Linearisierung durch Mittelwertbildung.
- FEM Diskretisierung \rightsquigarrow
Modellhierarchie: $n = 1357, 5177, 20209, 79841$.

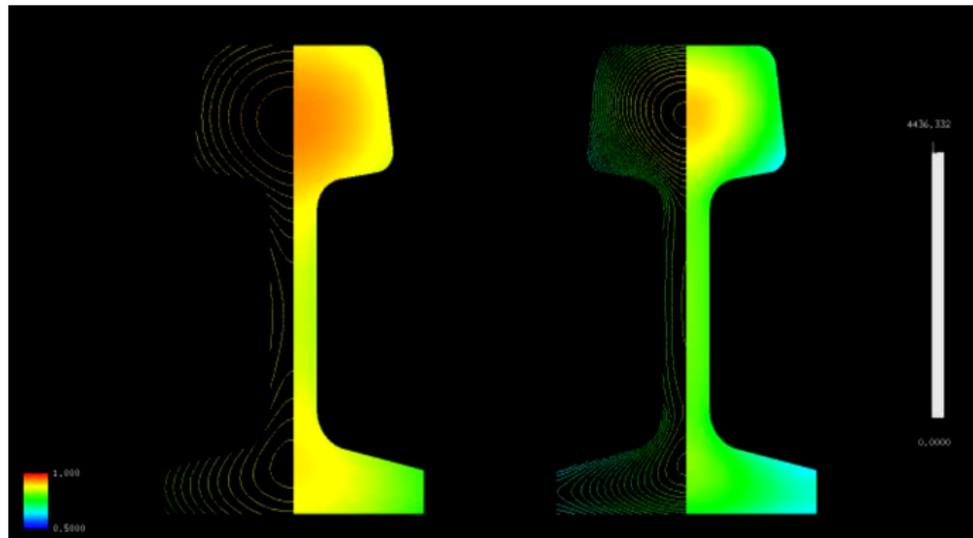


Ziel: Schnelle Kühlung (höhere Produktionsrate, **Vermeidung der Bildung von Perlit**) mit beschränkten Temperaturgradienten.

Ansatz: Adaptive LQR Steuerung.

ungesteuert

gesteuert



[BENNER/SAAK, PAMM 2004/2007]

Modell eines chemischen oder biologischen Reaktions-Diffusions-Prozesses, hier 3 Substanzen oder Spezies c_i , $i = 1, 2, 3$ (nur Vorwärtsreaktion: $S_1 + S_2 \rightarrow S_3$; PDE für S_3 kann unabhängig gelöst werden):

Gekoppeltes System von Reaktions-Diffusions-Gleichungen:

$$\partial_t c_i(\xi, t) = D_i \Delta c_i(\xi, t) - k c_1(\xi, t) c_2(\xi, t), \quad i = 1, 2 \text{ on } \Omega \times (0, T).$$

Randbedingungen:

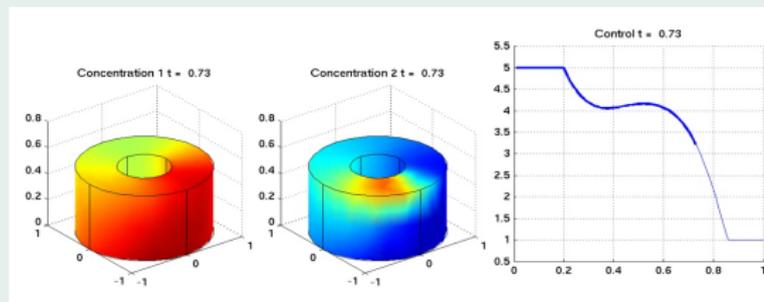
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} c_1(\xi, t) &= 0 \text{ auf } \delta\Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial}{\partial n} c_2(\xi, t) &= \begin{cases} 0 & \text{auf } (\delta\Omega \setminus \Omega_u) \times (0, T), \\ \alpha(\xi, t) u(t) & \text{auf } \Omega_u \times (0, T). \end{cases} \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen: $c_1(\xi, 0) = c_{1,0}(\xi)$, $c_2(\xi, 0) = c_{2,0}(\xi)$.

Ziel: Vollständige Reaktion von S_1 in vorgegebener Zeit mit beschränkter S_2 -Zufuhr.

- Vorberechnete optimierte Steuerung (primal-duale Aktive-Mengen-Methode [GRIESE/VOLKWEIN '05]); Störung des Modells und der Anfangsbedingungen
 ~> **optimierte Trajektorie (Produktionsrate) wird nicht erreicht.**
- Nichtlineare Regelung (MPC-LQG) [ITO/KUNISCH '03/'06, BENNER/HEIN '09].

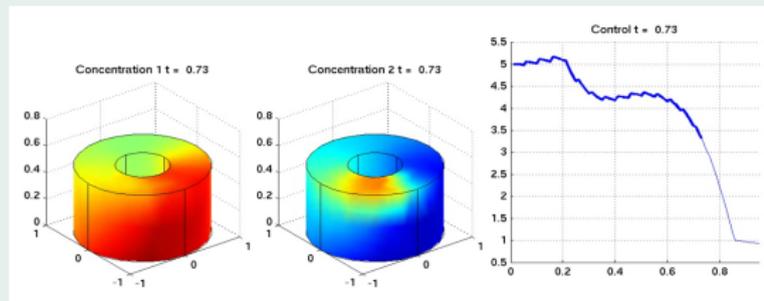
Ergebnis



[BENNER/HEIN, PAMM 2009]

- Vorberechnete optimierte Steuerung (primal-duale Aktive-Mengen-Methode [GRIESSE/VOLKWEIN '05]); Störung des Modells und der Anfangsbedingungen
 ~> **optimierte Trajektorie (Produktionsrate) wird nicht erreicht.**
- Nichtlineare Regelung (MPC-LQG) [ITO/KUNISCH '03/'06, BENNER/HEIN '09].

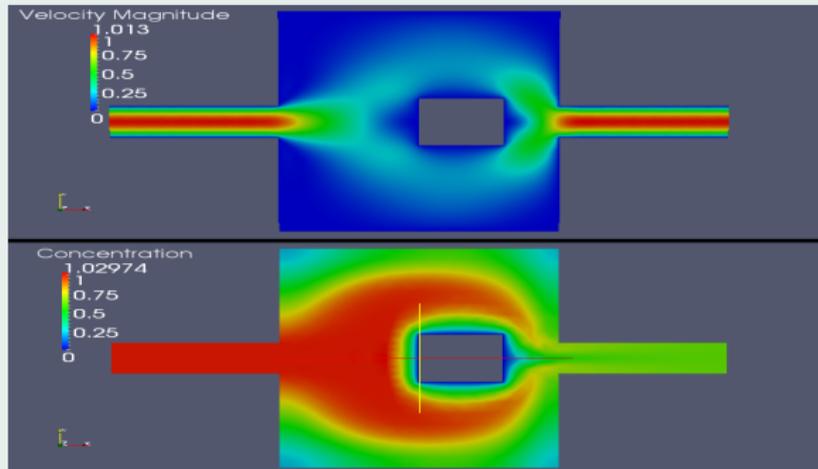
Ergebnis



[BENNER/HEIN, PAMM 2009]

Problemstellung Reduziere Konzentration einfließender Substanz auf akzeptables Niveau durch instantane Reaktion.

Simulation

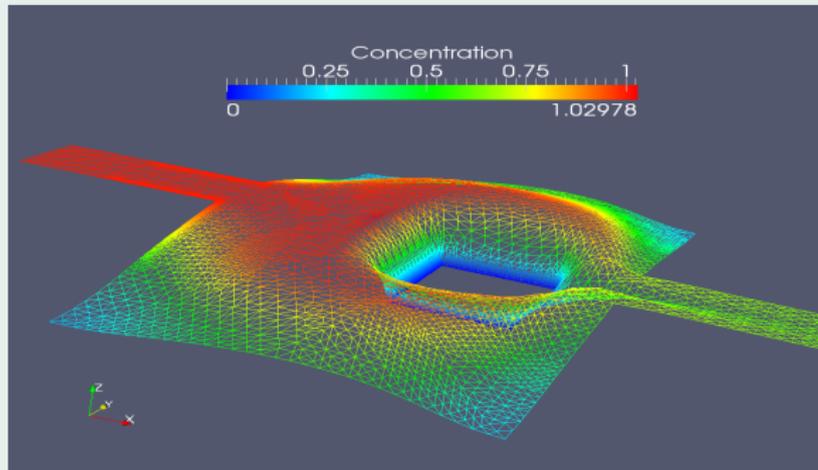


[BÄNSCH/BENNER/WEICHELT]

Gefördert durch DFG SPP1253 Projekt *Optimal Control-Based Feedback Stabilization of Multi-Field Flow Problems*.

Problemstellung Reduziere Konzentration einfließender Substanz auf akzeptables Niveau durch instantane Reaktion.

Simulation



[BÄNSCH/BENNER/WEICHELT]

Gefördert durch DFG SPP1253 Projekt *Optimal Control-Based Feedback Stabilization of Multi-Field Flow Problems*.

Strömungsratensensor (Anemometer)

- Sensor zur Messung der Strömungsraten von Flüssigkeiten oder Gasen.
- Basiert auf Heizelement mit Wärmesensoren auf beiden Seiten.
- Design benötigt kompaktes Modell, bei dem Geschwindigkeitsprofil und, wenn möglich, Materialparameter (Viskosität, Dichte) als symbolische Größen erhalten bleiben.
- **Mathematisches Modell:** Lineare Konvektions-Diffusions-Gleichung. Diskretisierung mit FEM im Ort \rightsquigarrow

$$E\dot{x}(t) = (A_0 + p_1 A_1)x(t) + bu(t), \quad y(t) = c^T x(t),$$

mit $n = 29,008$, $m = q = 1$.

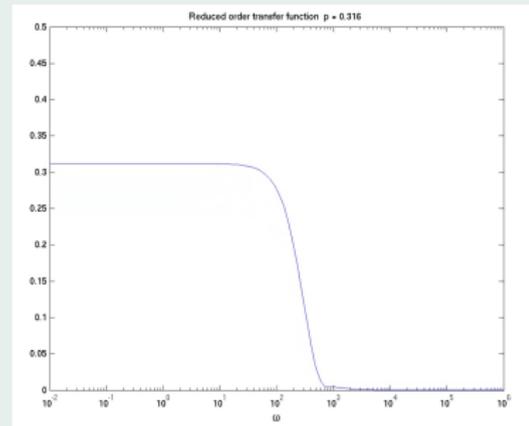


Strömungsratensensor (Anemometer)

Parameterstudie, basierend auf reduziertem Modell:

- Volles Modell: $n = 29.008$.
- Reduziertes Modell: $r = 75$
 $\max_{\omega, p} |E(j\omega, p)| \leq 6,5 \cdot 10^{-4}$
 $(E := G - \hat{G})$.
- Visualisierung: Frequenzantwort für $p \in [0, 1]$ (100 Frequenzen, 1000 Parameterwerte).
- Erstellung des Films:

> 11 Tage mit vollem Modell;
93 Sek. mit reduziertem Modell!



[BAUR/BENNER, AT 2009]

Gefördert durch DFG Projekt BE2174/7-1 *Automatic, Parameter-Preserving Model Reduction for Applications in Microsystems Technology* mit IMTEK, Freiburg.

- Die Komplexität der Computersimulation und, insbesondere, des Steuerungs-/Reglerentwurfs sowie der Optimierung wächst rapide durch
 - Multiphysik Anwendungen (z.B. MEMS),
 - Parameterunsicherheiten,
 - Netzwerkstrukturen (z.B. Nanoelektronik, biochemische (metabolische) Netzwerke),
 - komplizierte 3D Geometrien (z.B. Werkzeugmaschinen).
- Fluch der Dimensionalität:

Wachsende Leistungsfähigkeit der Computertechnik kann wachsende Modellkomplexität nicht kompensieren!
- Benötige reduzierte Modelle!

- Die Komplexität der Computersimulation und, insbesondere, des Steuerungs-/Reglerentwurfs sowie der Optimierung wächst rapide durch
 - Multiphysik Anwendungen (z.B. MEMS),
 - Parameterunsicherheiten,
 - Netzwerkstrukturen (z.B. Nanoelektronik, biochemische (metabolische) Netzwerke),
 - komplizierte 3D Geometrien (z.B. Werkzeugmaschinen).
- **Fluch der Dimensionalität:**
Wachsende Leistungsfähigkeit der Computertechnik kann wachsende Modellkomplexität nicht kompensieren!
- Benötige reduzierte Modelle!

Beispiel: Algorithmische vs. Hardware Beschleunigung

- Parameterstudien müssen den Ingenieuren auf ihren Desktopcomputern auf täglicher Basis zur Verfügung stehen.
- Im Anemometer-Beispiel konnte die Parameterstudie
von *11,3 Tagen* auf *93 Sekunden*
reduziert werden mithilfe einer neuen mathematischen Methode.
⇒ *Beschleunigungsfaktor* ≈ 10.500 .
- Da Prozessortakt limitiert ist, benötigt eine entsprechende Beschleunigung durch *Hardware* Mehrkern-Technologie.
- Bei idealem Speed-up: Benötige ≈ 21.000 Kerne!
- Verbesserung bei Problemen mit mehr als 2 Parametern noch erheblicher!

- Die Komplexität der Computersimulation und, insbesondere, des Steuerungs-/Reglerentwurfs sowie der Optimierung wächst rapide durch
 - Multiphysik Anwendungen (z.B. MEMS),
 - Parameterunsicherheiten,
 - Netzwerkstrukturen (z.B. Nanoelektronik, biochemische (metabolische) Netzwerke),
 - komplizierte 3D Geometrien (z.B. Werkzeugmaschinen).
- Fluch der Dimensionalität:
Wachsende Leistungsfähigkeit der Computertechnik kann wachsende Modellkomplexität nicht kompensieren!
- Benötige reduzierte Modelle!

- Die Komplexität der Computersimulation und, insbesondere, des Steuerungs-/Reglerentwurfs sowie der Optimierung wächst rapide durch
 - Multiphysik Anwendungen (z.B. MEMS),
 - Parameterunsicherheiten,
 - Netzwerkstrukturen (z.B. Nanoelektronik, biochemische (metabolische) Netzwerke),
 - komplizierte 3D Geometrien (z.B. Werkzeugmaschinen).
- Fluch der Dimensionalität:
Wachsende Leistungsfähigkeit der Computertechnik kann wachsende Modellkomplexität nicht kompensieren!
- Benötige reduzierte Modelle!



Schlüsseltechnologie: Systemapproximation/Modellreduktion