Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Sommersemester 2012

Martin Stoll
Martin Heß

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 2. Hausaufgabe

Abgabe: 22.05.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** **(Beweis zu Satz II.9 der Vorlesung)**

Sei $Q^*AQ = D + N$ eine Schur-Zerlegung von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, d.h.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & \ast \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \Lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$$

sowie $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitär. Dann gilt für $\mu \in \Lambda(A + E)$:

$$\min_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda - \mu| \leq \max \left\{ \Theta, \Theta^{\frac{1}{p}} \right\},$$

wobei

$$\Theta = \|E\|_2 \sum_{k=0}^{p-1} \|N\|_2^k$$

und $p =$ Nilpotenzindex von $|N|$, d.h. $p = \min\{q \in \mathbb{N}_0 \mid |N|^q = 0\}$ mit $|N| = [|n_{ij}|]_{i,j=1}^n$.
Hinweis: Vergleiche Beweis von Bauer-Fike; benötigt Neumannsche Reihe.

Aufgabe 2 **(4 Punkte)** **(Pseudospektrum)**

Zeigen Sie für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\varepsilon > 0$ und $\|.\| = \|.\|_2$, dass folgende Definitionen des ε–Pseudospektrums äquivalent sind:

1. $\Lambda_\varepsilon(A) := \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid \|(A - \mu I)^{-1}\| > \varepsilon^{-1} \right\}$
2. $\Lambda_\varepsilon(A) := \{ \mu \in \mathbb{C} \mid \exists E \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ mit } \|E\| < \varepsilon \text{ und } \mu \in \Lambda(A + E) \}$
3. $\Lambda_\varepsilon(A) := \{ \mu \in \mathbb{C} \mid \|(A - \mu I)v\| < \varepsilon \text{ für } v \in \mathbb{C}^n \text{ mit } \|v\| = 1 \}$

Hinweis: Stellen Sie dazu E an geeigneter Stelle als Rang-1 Störung dar, d.h. $E = suw^*$ für $u, w \in \mathbb{C}^n$ mit $\|u\| = \|w\| = 1$ und $s \in \mathbb{C}$.
Zusatz: An welcher Stelle benötigt der Beweis die Bedingung $\|.\| = \|.\|_2$, lässt sich der Beweis erweitern, so dass das Resultat für beliebige Normen gilt?
Bemerkung: Unter `http://web.comlab.ox.ac.uk/projects/pseudospectra/eigtool/` kann man die kostenlose EigTool Software for MATLAB®herunterladen, mit der sich einfach schöne Pseudospektra-Plots generieren lassen.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)** **(Inverse Iteration)**

Seien $\mu = \tilde{\lambda}$ eine berechnete Approximation zu $\lambda \in \Lambda(A)$ sowie $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ mit $\|q^{(0)}\| = 1$. Die *inverse Iteration* ergibt sich, indem in der Potenziteration A durch $(A - \mu I)^{-1}$ ersetzt wird. D.h. es wird in jedem Iterationsschritt eine lineares Gleichungssystem gelöst.
Erklären Sie, warum die inverse Iteration sehr schnell konvergiert, falls die Startnäherung an den Eigenwert gut ist.
Hinweis: Vergleichen Sie dazu auch den Beweis zur Potenziteration.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)** **(Rayleigh-Quotienten-Iteration)**

Seien $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Der Skalar $r(x, A) := r(x) := \frac{x^T Ax}{x^T x}$ heißt der *Rayleigh-Quotient* zu x bzgl. A.

a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Rayleigh-Quotienten:

(i). Homogenität: $r(\alpha x, \beta A) = \beta r(x, A),\ 0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii). Translationsinvarianz: $r(x, A - \alpha I) = r(x, A) - \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(iii). Der Rayleigh-Quotient $r(x, A)$ minimiert für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$ den Ausdruck $\|(A - \mu I)x\|_2^2$.

(iv). Was passiert, wenn x ein exakter Eigenvektor von A ist?

b) Ersetzt man den konstanten Shift μ der inversen Iteration (vgl. Aufgabe 3) in jedem Schritt durch den Rayleigh-Quotienten $r(q^{(k)})$ liefert dies die *Rayleigh-Quotienten-Iteration* (RQI). Sei nun $r^{(k)} := \left(A - r(q^{(k)})I\right) q^{(k)}$ das Residuum der RQI im k. Schritt. Zeigen Sie, dass $\{\|r^{(k)}\|_2,\ k = 0, 1, \ldots\}$ eine monoton fallende Folge für beliebige Startvektoren $q^{(0)}$ ist.

Zusatz: Lassen sich die gezeigten Eigenschaften des Rayleigh-Quotienten, bzw. der RQI, auf eine größere Klasse von Matrizen als $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verallgemeinern?

Aufgabe 5 **(4 Punkte)** **(Einfache Vektor-Iterationen)**

Implementieren Sie die Potenziteration, die inverse Iteration und die Rayleigh-Quotienten-Iteration in MATLABund vergleichen Sie diese anhand der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \end{bmatrix}, \quad B = \texttt{wilkinson(n)},$$

für verschiedene n (z.B. n=20,50,500). Dazu ist es zweckmäßig die Norm der Residuen $\|r^{(k)}\|_2$ in jedem Iterationsschritt zu speichern und den Verlauf anschließend graphisch darzustellen.
Senden Sie Ihre Programme an `hessm@mpi-magdeburg.mpg.de`**. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B.** `name_ha1a5`**.**
Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert.
Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.