Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Sommersemester 2012
Martin Stoll
Martin Heß

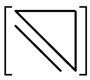
Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 3. Hausaufgabe

Abgabe: 05.06.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte) (Berechnung der Hessenberg-Form)

Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert eine orthogonale Matrix, so daß

$$Q^T AQ \;=\; H \;=$$



$$, \qquad (1)$$

d.h., H ist obere Hessenbergmatrix. Geben Sie einen Algorithmus an, der die Hessenberg-Form wie in (1) berechnet und bestimmen Sie dessen Aufwand.
Sei nun A eine Matrix, die bereits bis auf den Eintrag a_{31} in oberer Hessenberg-Form ist. Geben Sie einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Hessenberg-Form an und vergleichen Sie den Aufwand mit dem Algorithmus zur Berechnung von (1).

Aufgabe 2 (5 Punkte) (Hessenberg-Reduktion und Krylov-Matrizen)

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist $Q^TAQ = H$ eine unreduzierte Hessenberg-Matrix genau dann wenn $Q^T K(A, Q(:,1), n) = R$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix ist. Dabei ist

$$K(A, v, j) := [v, Av, \dots, A^{j-1}v] \in \mathbb{R}^{n\times j}$$

die *Krylov-Matrix* zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) (Beweis zu Lemma II.21 der Vorlesung)

Sei $\mu \in \Lambda(H)$, H unreduzierte Hessenberg-Matrix (d.h. $h_{j+1,j} \neq 0$, $j = 1, \dots, n-1$) und $H - \mu I = QR$ eine QR-Zerlegung.
a) Zeigen Sie, dass dann für $\tilde{H} := RQ + \mu I$ gilt: $\tilde{h}_{n,n-1} = 0$, $\tilde{h}_{n,n} = \mu$.
Zusatz: Was passiert falls nicht μ, aber $\mu + e$ für $\|e\| < \varepsilon$ Eigenwert ist?
b) Was bedeutet das für die geshiftete QR-Iteration

$$\begin{aligned} H_{k-1} - \mu I &=: Q_k R_k, \\ H_k &:= R_k Q_k + \mu I \; ? \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) (Frobeniusnorm)

Beweisen Sie die Invarianz der Frobeniusnorm für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezüglich orthogonaler Ähnlichkeitstransformationen.

Aufgabe 5 **(5 Punkte)** **(Verbesserungspotenzial in der QR-Iteration)**

Die Basis QR-Iteration

$H_0 := A$
for $i = 1, 2 \ldots$ **do**
  $H_{i-1} =: QR$
  $H_i := RQ$
end for

berechnet nach Konvergenz eine Schur-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Programmieren Sie die Basis QR-Iteration.

b) Ergänzen Sie die QR-Iteration um eine vorherige Hessenberg-Reduktion der Matrix A (vgl. Aufgabe 1) und vergleichen Sie die Laufzeit der reinen Iteration, sowie der gesamten Berechnung. Erklären Sie Ihre Beobachtung.

c) Fügen Sie nun einen einfachen Shift (vgl. Aufgabe 3) $\mu = h_{n,n}$ zu der Iteration hinzu. Vergleichen Sie mit den beiden vorherigen Iterationen. Stellen Sie dazu die Nebendiagonalelemente während der Iteration geeignet graphisch dar und beschreiben Sie Ihre Beobachtung.

Hinweis: Verwenden Sie für die Transformation auf Hessenbergform entweder Ihren Algorithmus aus Aufgabe 1 oder die MATLAB®-Funktion `hess(A)`.

Senden Sie Ihre Programme an `hessm@mpi-magdeburg.mpg.de`. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha1a5`. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.