Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg | Sommersemester 2012
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik | Martin Stoll
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme | Martin Heß
Computational Methods for Systems and Control Theory

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 4. Hausaufgabe

Abgabe: 12.06.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (4 Punkte) (Jacobi-Verfahren für SEP)

Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Implementieren Sie das klassische und zyklische Jacobi-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte von A.
Vergleichen Sie die beiden Implementierungen hinsichtlich der Konvergenz- und Ausführungsgeschwindigkeit für zufällig erzeugte symmetrische Matrizen. Plotten Sie dazu den Verlauf von $\mathrm{off}(A^{(\ell)}) := \sqrt{\|A\|_F - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{jj}^2}$ während der Iteration. (Dazu überlege man sich, wie $\mathrm{off}(A^{(\ell)})$ in jedem Schritt effizient berechnet werden kann!)

Aufgabe 2 (6 Punkte) (Verallgemeinerte Schurzerlegung)

Sei $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann existieren unitäre Matrizen Q und Z so dass

$$Q^H BZ = S = \begin{bmatrix} \diagdown \end{bmatrix} \quad \text{und } Q^H AZ = T = \begin{bmatrix} \diagdown \end{bmatrix}.$$

Wenn für ein k gilt $t_{kk} = s_{kk} = 0$, dann gilt für das Spektrum $\Lambda(A,\ B) = \mathbb{C}$ und das Paar $(A,\ B)$ nennt man dann *singulär*. Andererseits heisst $(A,\ B)$ *regulär* und

$$\Lambda(A,\ B) = \{\lambda_i := t_{ii}/s_{ii}\ :\ s_{ii} \neq 0\}\ \cup\ \{\lambda_i = \infty\ :\ s_{ii} = 0\}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrixpaare $(A,\ B)$ und untersuchen Sie ob sie regulär oder singulär sind.

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Eine gute Übersicht und Basis für den Übergang vom QR- zum QZ-Algorithmus liefern z.B. die beiden (deutschen) Wikipedia Artikel
(`http://de.wikipedia.org/wiki/QR-Algorithmus`,
`http://de.wikipedia.org/wiki/QZ-Algorithmus`)
sowie Kapitel 7.7 im Buch
G. Golub, C. Van Loan: *Matrix Computations*, 3. Aufl., The John Hopkins University Press, 1996.

Senden Sie Ihre Programme an `hessm@mpi-magdeburg.mpg.de`. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha1a5`. Geben Sie ausserdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.