Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Sommersemester 2012
Martin Stoll
Martin Heß

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 5. Hausaufgabe

Abgabe: 26.06.2012 in der Vorlesung

Aufgabe 1 **(7 Punkte)** **(Berechnung der Singulärwertzerlegung (SVD))**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Implementieren Sie einen stabilen Algorithmus zur Berechnung der SVD von A. Dazu wird zuerst eine Householder-Bidiagonalisierung der Matrix A vorgenommen und dann werden Golub-Kahan SVD Schritte durchgeführt, bis die Diagonalform hergestellt ist.
Siehe auch: Golub/van Loan: Matrix Computations, Kapitel 8.6.2.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)** **(Eigenschaften der Singulärwertzerlegung (SVD))**

Sei $r = \operatorname{rank}(A)$, $A = U\Sigma V^T$ eine Singulärwertzerlegung, $U = [u_1, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthonormal. Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach:

a) *Schmidt-Eckart-Young-Mirsky-Theorem*: Wenn $k < r$ und $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ dann gilt:

$$\min_{\operatorname{rank}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1},$$

d.h. A_k ist die beste Rang k Approximation von A.

Hinweis: Man Überlege sich zunächst, dass $\operatorname{rank}(A_k) = k$ gilt. Dann wähle man eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rank}(B) = k$. Es existieren orthonormale Vektoren $x_1, \ldots, x_{n-k}$, so dass $\ker(B) = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-k}\}$, und es gilt: $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-k}\} \cap \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\} \neq \{\emptyset\}$. Sei nun z mit $\|z\|_2 = 1$ ein Vektor aus dieser Durchschnittsmenge, dann gilt $Bz = 0$. Unter Ausnutzung der Darstellung von Az findet man dann die benötigte Abschätzung.)

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \operatorname{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_n\} \\ \operatorname{range}(A) &= \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_r\}. \end{aligned}$$

c) Es gilt: $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2}$.

d) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen der SVD von A und den Eigenwertzerlegungen der Matrizen

(i) $A^T A$,

(ii) AA^T,

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$?

Aufgabe 3 **(5 Punkte)** **(Bilddatenkompression mit SVD)**

Schreiben Sie ein MATLAB®-Programm, welches eine Matrix mit Bilddateninformation einliest, eine beste Approximation vom Rang k an diese Matrix berechnet, sowie den Approximationsfehler (in der 2-Norm), das Original und das komprimierte Bild darstellt (benutzen Sie `subplot`), sowie den für das Original und das komprimierte Bild benötigten Arbeitsspeicher ausgibt. Testen Sie das Programm für ein Bild des Magdeburger Doms (Quelle: `http://de.wikipedia.org/wiki/Magdeburger_Dom`), welches Sie als `dom_md_c.mat` auf der Vorlesungshomepage finden, und verschiedene Werte von k. Ermittlen Sie (empirisch) für das Bild die beste Kompression, so dass das approximierte Bild noch optisch verlustfrei dargestellt werden kann.

Hinweis: Das MATLAB-Bild erhält man mit dem `load`-Befehl. Z.B. erhält man mit

```
>> load dom_md_c.mat
```

eine Bilddatenmatrix `A` (eine 200×300-Matrix in diesem Fall, also hat das Dom-Bild 200×300 Bildpunkte) sowie eine Matrix `map`, in der die Information über das verwendete Farbmodell gespeichert ist. Um nun das Bild in MATLAB anzuzeigen, kann man die Befehle

```
>> colormap(map)
>> image(A)
```

ausführen.

Senden Sie Ihre Programme an `hessm@mpi-magdeburg.mpg.de`. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha1a5`. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie ausserdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.