Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Sommersemester 2012

Martin Stoll
Martin Heß

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 1. Übung

Aufgabe 1 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen die Eigenwerte und die zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren sowie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2 (Naive Methode zur numerischen Eigenwertberechnung)

Wir untersuchen die numerische Berechnung der Eigenwerten einer Matrix A als Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms $\det(A-\lambda I)$. Generieren Sie sich dazu in MATLAB®mittels `A=diag(1:n)`, $n \in \mathbb{N}$ einfache Diagonalmatrizen. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen als Nullstellen des charakteristischen Polynoms über den Befehl `roots(poly(A))`. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den exakten Eigenwerten für steigende Dimensionen (z.B. $n = 2, \ldots, 30$) indem Sie Real- und Imaginärteile der Eigenwerte im $\mathbb{R}^2$ plotten. Ist der verwendete Weg zur Eigenwertberechnung empfehlenswert?

Aufgabe 3 (Lineare, zeitinvariante gewöhnliche Differentialgleichungssysteme)

Wir betrachten Anfangswertprobleme der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),\ x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ f(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

a) Geben sie eine mit Hilfe der Eigenwerte und Eigen- / Hauptvektoren von A eine Darstellung für die homogene Lösung (also $f(t) \equiv 0$ in (1)) $x_h(t)$ an. Nennen Sie Lösungsstrategien für das inhomogene Problem.

b) Welche Aussagen über die Dynamik von (1) lassen sich direkt an den Eigenwerten von A ablesen.

c) Führen Sie den in **a)** genannten Lösungsweg exemplarisch für das Anfangswertproblem mit der Matrix G aus Aufgabe 1 sowie mit

$$x(t_0 = 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

durch.

Aufgabe 4 **(The Big Six Matrix Decompositions)**

a) Wiederholen Sie Eigenschaften der folgenden sechs äußerst wichtigen Matrixfaktorisierungen:

  i) Cholesky-,

  ii) pivotisierte LU-,

  iii) QR-,

  iv) Spektral-,

  v) Schur- und

  vi) Singulärwertzerlegung (SVD).

  Besprechen Sie dabei auch Existenz und Eindeutigkeit. Welche Algorithmen sind Ihnen für die einzelnen Zerlegungen bekannt?
  Kennen Sie weitere wichtige Matrixzerlegungen?

b) Zeigen Sie, dass die dünne QR-Zerlegung $A = Q_1 R_1$ eindeutig ist, falls $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $(m > n)$ vollen Spaltenrang hat. $Q_1 \in \mathbb{R}^{m,n}$ hat dabei orthonormale Spalten und $R_1 \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie außerdem, dass R_1 aus dem unteren Dreiecksfaktor G der Cholesky-Faktorisierung von $A^T A$ durch die Identität $R_1 = G^T$ hervorgeht.