Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Wintersemester 2015/16
Dr. Sara Grundel
Carolin Penke

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 1. Hausaufgabe

Abgabe: 22.10.2013 in der Vorlesung
Besprechung: 26.10.2013

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** **(Symmetrie im verallgemeinerten EWP)**

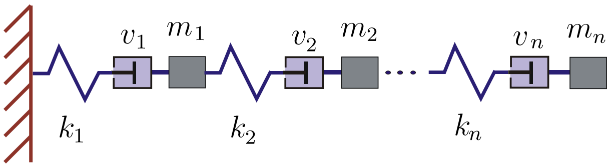
Seien $A = A^T$ und $B = B^T > 0$. Die kanonische Transformation $B^{-1}A$ führt dann auf ein nichtsymmetrisches Eigenwertproblem. Geben Sie eine Möglichkeit an, das verallgemeinerte Eigenwertproblem

$$Ax = \lambda Bx, \; x \neq 0$$

in ein symmetrisches Eigenwertproblem zu überführen. Zeigen Sie, dass die verallgemeinerten Eigenvektoren x ein orthogonales System bezüglich des durch B induzierten Skalarproduktes bilden.

Aufgabe 2 **(6 Punkte)** **(Ursprung des QEP)**

Zur Beschreibung von mechanischen Systemen, insbesondere für Schwingungen oder Vibrationsanalysen, verwendet man in der Regel als Grundmodell das Masse-Feder-System mit Dämpfung.



Dabei sind:

m_i i-te Punktmasse

k_i Federkonstante der i-ten Feder

v_i die i-ten Dämpfungskonstanten für proportionale Dämpfung

Betrachten Sie den Vektor $x = (x_i)_{i=1,\dots,n}^T \in \mathbb{R}^n$ der Auslenkungen der i-ten Punktmassen aus der Ruhelage.

a) Leiten Sie aus dem Federgesetz (Federkraft = Federkonstante mal Auslenkung) der proportionalen Dämpfung (Bremskraft = Dämpfungskonstante mal Geschwindigkeit) und dem Newtonschen Gesetz (Kraft = Masse mal Beschleunigung) das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung her, dass das Masse-Feder-System mit Dämpfung beschreibt.

$$M\ddot{x}(t) = -D\dot{x}(t) - Kx(t) \tag{1}$$

Setzen Sie nun für $x(t)$ einen geeigneten Ansatz ein, um das quadratische Eigenwertproblem (QEP) zu erhalten.

b) Schreiben Sie das QEP in ein verallgemeinertes Eigenwertproblem (GEP) um und dieses dann in ein Standard-Eigenwertproblem (EVP). **Hinweis:** Gehen Sie analog vor, wie bei der Umschreibung von Differentialgleichungen höherer Ordnung in Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

c) Die Umformulierung in ein GEP in **b)** wird auch *Linearisierung des QEP* genannt und ist nicht eindeutig. Geben Sie eine weitere Linearisierung an.

d) Wie könnte, eine Lösungsdarstellung von $x(t)$ in (1) mit den Eigenwerten und -vektoren des QEP aussehen? Es darf zur Vereinfachung davon ausgegangen werden, dass alle Eigenwerte algebraisch einfach sind und M regulär ist.

Aufgabe 3 (10 Punkte) (Normale Matrizen)

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$.

i) A ist normal, d.h. $AA^H = A^H A$.

ii) $U^H AU$ ist normal für jede unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$.

iii) Für jede unitäre Matrix U mit $U^H AU = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}, B_{11} \in \mathbb{C}^{k,k}$, gilt $B_{12} = 0$.

iv) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$, so dass $U^H AU$ diagonal ist.

v) Es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$ mit $A^H = UA$.

vi) $(Ax, Ay) = (A^H x, A^H y)$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$.

Zusatz: Zeigen Sie außerdem, dass i)-vi) zu folgender Bedingung äquivalent sind:

vii) $AA^H - A^H A$ ist positiv semidefinit (d.h. $x^H(AA^H - A^H A)x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$).