Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Wintersemester 2015/16
Dr. Sara Grundel
Carolin Penke

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 2. Hausaufgabe

Abgabe: 05.11.2015 in der Vorlesung
Besprechung: 09.11.2015

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** **(Beweis zu Störungstheorie)**

Sei $Q^*AQ = D + N$ eine Schur-Zerlegung von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, d.h.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \ddots \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \Lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

sowie $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär. Dann gilt für $\mu \in \Lambda(A+E)$:

$$\min_{\lambda\in\Lambda(A)} |\lambda - \mu| \leq \max\left\{\Theta, \Theta^{\frac{1}{p}}\right\},$$

wobei

$$\Theta = \|E\|_2 \sum_{k=0}^{p-1} \|N\|_2^k$$

und $p =$ Nilpotenzindex von $|N|$, d.h. $p = \min\{q \in \mathbb{N}_0 \mid |N|^q = 0\}$ mit $|N| = [|n_{ij}|]_{i,j=1}^n$.
Hinweis: Vergleiche Beweis von Bauer-Fike; benötigt Neumannsche Reihe.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)** **(Pseudospektrum)**

Zeigen Sie für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\varepsilon > 0$ und $\|.\| = \|.\|_2$, dass folgende Definitionen des ε–Pseudospektrums äquivalent sind:

1. $\Lambda_\varepsilon(A) := \left\{\mu \in \mathbb{C} \mid \|(A - \mu I)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\right\}$
2. $\Lambda_\varepsilon(A) := \{\mu \in \mathbb{C} \mid \exists E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\|E\| < \varepsilon$ und $\mu \in \Lambda(A+E)\}$
3. $\Lambda_\varepsilon(A) := \{\mu \in \mathbb{C} \mid \|(A - \mu I)v\| < \varepsilon$ für $v \in \mathbb{C}^n$ mit $\|v\| = 1\}$

Hinweis: Stellen Sie dazu E an geeigneter Stelle als Rang-1 Störung dar, d.h. $E = suw^*$ für $u, w \in \mathbb{C}^n$ mit $\|u\| = \|w\| = 1$ und $s \in \mathbb{C}$.
Zusatz: An welcher Stelle benötigt der Beweis die Bedingung $\|.\| = \|.\|_2$, lässt sich der Beweis erweitern, so dass das Resultat für beliebige Normen gilt?
Bemerkung: Unter `http://web.comlab.ox.ac.uk/projects/pseudospectra/eigtool/` kann man die kostenlose EigTool Software for MATLAB® herunterladen, mit der sich einfach schöne Pseudospektra-Plots generieren lassen.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)** **(Unterräume und Schur-Form)**

a) Geben Sie eine Givens-Rotation $G(\theta) \in \mathbb{R}^2$ an mit

$$G(\theta)^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} G(\theta) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \tilde{t}_{12} \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Wie kann man mit Hilfe solcher Givens-Rotationen für eine Matrix A in Schur-Form mit $\Lambda(A) \subset \mathbb{R}$ einen invarianten Unterraum zu einer vorgegebenen Teilmenge von Eigenwerten von A bestimmen?

b) Geben Sie einen Algorithmus zur direkten Berechnung eines Eigenvektors zu einem beliebigen reellen Eigenwert einer Matrix A in Schur-Form an, **ohne** Eigenwerte auf der Diagonale der Schur-Form zu vertauschen.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)** **(Inverse Iteration)**

Seien $\mu = \tilde{\lambda}$ eine berechnete Approximation zu $\lambda \in \Lambda(A)$ sowie $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ mit $\|q^{(0)}\| = 1$. Die *inverse Iteration* ergibt sich, indem in der Potenziteration A durch $(A - \mu I)^{-1}$ ersetzt wird. D.h. es wird in jedem Iterationsschritt eine lineares Gleichungssystem gelöst.
Erklären Sie, warum die inverse Iteration sehr schnell konvergiert, falls die Startnäherung an den Eigenwert gut ist.
Hinweis: Vergleichen Sie dazu auch den Beweis zur Potenziteration.