Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Wintersemester 2015/16
Dr. Sara Grundel
Carolin Penke

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 3. Hausaufgabe

Abgabe: 19.11.2015 in der Vorlesung
Besprechung: 23.11.2015

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** **(Tridiagonalform einer symmetrischen Matrix)**

Für alle symmetrischen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert eine orthogonale Matrix, so daß

$$Q^T A Q \;=\; T \;=\; \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

d.h., T ist Tridiagonalmatrix. Leiten Sie einen Algorithmus her, der die Tridiagonalform wie in (1) berechnet und bestimmen Sie dessen Aufwand.

Zusatz: Sei $T = T^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal und $\lambda \in \Lambda(T)$ mit algebraischer Vielfachheit k.
Zeigen Sie, daß mindestens $k-1$ Nebendiagonalelemente von T null sein müssen. Was bedeutet das für den symmetrischen QR Algorithmus?

Aufgabe 2 **(5 Punkte)** **(Hessenberg-Reduktion und Krylov-Matrizen)**

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist $Q^T A Q = H$ eine unreduzierte Hessenberg-Matrix genau dann wenn $Q^T K(A, Q(:,1), n) = R$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix ist.
Hinweis: Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ist die Krylov-Matrix $K(A, v, j) \in \mathbb{R}^{n\times j}$ definiert durch

$$K(A, v, j) := [v, Av, \dots, A^{j-1}v].$$

Zusatz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zusätzlich symmetrisch. Zeigen Sie, wenn R singulär ist und $k = \underset{j=1,\dots,n}{\operatorname{argmin}} \{r_{jj} = 0\}$ dann gilt auch $k = \underset{j=1,\dots,n-1}{\operatorname{argmin}} \{h_{j,j-1} = 0\}$.

Aufgabe 3 **(10 Punkte)** **(Jacobi-Verfahren für SEP)**

Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Implementieren Sie das klassische und zyklische Jacobi-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte von A.
Vergleichen Sie die beiden Implementierungen hinsichtlich der Konvergenz- und Ausführungsgeschwindigkeit für zufällig erzeugte symmetrische Matrizen. Plotten Sie dazu den Verlauf von

$$\operatorname{off}(A^{(\ell)}) := \sqrt{\|A\|_F^2 - \sum_{j=1}^{n} a_{jj}^2}$$

während der Iteration. (Dazu überlege man sich, wie $\operatorname{off}(A^{(\ell)})$ in jedem Schritt effizient berechnet werden kann!)
Senden Sie Ihre Programme an `penke@mpi-magdeburg.mpg.de`. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha3auf3`. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.