Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Wintersemester 2015/16
Dr. Sara Grundel
Carolin Penke

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 4. Hausaufgabe

Abgabe: 03.12.2015 in der Vorlesung
Besprechung: 07.12.2015

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** **(Vergleich von Fehlerschranken für Eigenwerte)**

Seien Matrizen A_1, A_2, A_3 sowie eine Störungsmatrix E gegeben als

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \ E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie (von Hand oder mit Computeralgebra) Fehlerschranken für die Eigenwerte der gestörten Matrizen $A_i + E, \ i = 1, 2, 3$ mit Hilfe folgender Abschätzungen:

- Gershgorin-Kreise,
- Satz von Bauer–Fike,
- Störungssatz II.10 für einfache Eigenwerte.

Vergleichen Sie die Ergebnisse der verschiedenen Abschätzungen.

Aufgabe 2 **(3 Punkte)** **(A-posteriori Fehlerabschätzungen für Eigenwerte)**

a) Die Norm des Residuums $r := A\tilde{x} - \tilde{\lambda}\tilde{x}$ stellt eine eine obere Schranke für den Rückwärtsfehler bei der Berechnung eines Eigenpaares $\tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$, $\tilde{x} \in \mathbb{C}^n$ zur Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dar.
Veranschaulichen Sie dieses Ergebnis in MATLAB anhand der Matrix $A =$`gallery('frank',n)` für verschiedene ungerade n (etwa $n = [5 : 4 : 61]$). Verwenden Sie dazu, dass für ungerade n stets 1 ein Eigenwert von A ist (Siehe `doc gallery`). Plotten Sie einerseits den Fehler zum Eigenwert 1 über der Matrixdimension, sowie den berechneten Eigenwert $\tilde{\lambda}$, die 1 und den Kreis mit Radius $\|r\|$ um $\tilde{\lambda}$.
Zusatz: Berechnen Sie für einen kleinen Wert von n die exakten Eigenwerte (per Hand oder Computeralgebra) und erstellen Sie dazu den Plot mit exakten und berechneten Eigenwerten, sowie den Fehlerumgebungen zu den berechneten Eigenwerten.
b) Berechnen Sie nun die Fehlerschranken gemäß Störungssatz II.10. Wiederholen sie das obige Vorgehen und vergleichen sie diese Abschätzungen mit denen aus Bauer–Fike.

Aufgabe 3 **(3 Punkte)** **(Fehlerfortpflanzung)**

Sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Testen Sie $||AV - VD||$ für verschiedene ε mit

$$[V, D] = \mathtt{eig}(A) \quad \text{bzw.} \quad [V, D] = \mathtt{eig}(A, \text{'nobalance'}).$$

Was beobachten Sie? Versuchen Sie ihre Beobachtungen zu erklären.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)** **(Rayleigh-Quotienten-Iteration)**

Seien $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Der Skalar $r(x, A) := r(x) := \frac{x^T Ax}{x^T x}$ heißt der *Rayleigh-Quotient* zu x bzgl. A.

a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des Rayleigh-Quotienten:

(i). Homogenität: $r(\alpha x, \beta A) = \beta r(x, A),\ 0 \neq \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(ii). Translationsinvarianz: $r(x, A - \alpha I) = r(x, A) - \alpha,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(iii). Der Rayleigh-Quotient $r(x, A)$ minimiert für beliebige $\mu \in \mathbb{R}$ den Ausdruck $\|(A - \mu I)x\|_2^2$.

(iv). Was passiert, wenn x ein exakter Eigenvektor von A ist?

b) Ersetzt man den konstanten Shift μ der inversen Iteration (vgl. HA 2, Aufgabe 4) in jedem Schritt durch den Rayleigh-Quotienten $r(q^{(k)})$ liefert dies die *Rayleigh-Quotienten-Iteration* (RQI). Sei nun $r^{(k)} := \left(A - r(q^{(k)})I\right) q^{(k)}$ das Residuum der RQI im k. Schritt. Zeigen Sie, dass $\{\|r^{(k)}\|_2,\ k = 0, 1, \ldots\}$ eine monoton fallende Folge für beliebige Startvektoren $q^{(0)}$ ist.

Zusatz: Lassen sich die gezeigten Eigenschaften des Rayleigh-Quotienten, bzw. der RQI, auf eine größere Klasse von Matrizen als $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verallgemeinern?

Senden Sie Ihre Programme an `penke@mpi-magdeburg.mpg.de`**. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B.** `name_ha3auf3`**. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.**