Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Wintersemester 2015/16
Dr. Sara Grundel
Carolin Penke

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 5. Hausaufgabe

Abgabe: 07.01.2016 in der Vorlesung
Besprechung: 11.01.2016

Aufgabe 1 (6 Punkte) (Speicherformate für dünnbesetzte Matrizen I)

Informieren Sie sich über die folgende Speicherformate:

- *Coordinate List* (COO)
- *Compressed Row Storage* (CRS)
- *Compressed Column Storage* (CCS)

(Zum Beispiel unter `http://en.wikipedia.org/wiki/Sparse_matrix`.)
Gehen Sie dabei kurz auf Vor- und Nachteile ein. Schreiben Sie außerdem die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 9 \\ 12 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

in allen 3 Formaten.

Aufgabe 2 (4 Punkte) (Speicherformate für dünnbesetzte Matrizen)

Erklären Sie warum CRS für die Matrixmultiplikation Ax und CCS für die Multiplikation $A^T x$ von Vorteil ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte) (Lanczos-Algorithmus)

Implementieren Sie den Lanczos-Prozess und plotten Sie in jedem Schritt die Eigenwerte der kleinen Tridiagonalmatrix sowie die Eigenwerten der ursprünglichen Matrix.
Benutzen Sie das Beispiel `A=gallery('poisson',20)`.

Aufgabe 4 (6 Punkte) (Unsymmetrischer Lanczos-Algorithmus)

Leiten Sie den unsymmetrischen Lanczos-Algorithmus her. Benutzen Sie hierfür die Darstellung von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in Tridiagonalform

$$Q^{-1}AQ = T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & \dots & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \gamma_{n-1} \\ 0 & \dots & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{bmatrix}$$

mit einer nicht-singulären Matrix Q. Dabei kann man die Spalten durch

$$\begin{aligned} Q &= [q_1, \ldots, q_n] \,, \\ Q^{-T} = P &= [p_1, \ldots, p_n] \end{aligned}$$

partitionieren und dann die Spalten in $AQ = QT$ und $A^T P = PT^T$ vergleichen. Dieser Vergleich und die Biorthogonalitätsbedingung $P^T Q = I$ sowie die Definitionen

$$\gamma_0 q_0 \equiv 0, \quad \beta_0 p_0 \equiv 0$$

führen zur Rekursionsvorschrift für q_k, p_k. Dabei gilt

$$1 = p_{k+1}^T q_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{s_k}{\gamma_k} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{r_k}{\beta_k} \end{pmatrix}$$

mit $\beta_k q_{k+1} \equiv r_k$ und $\gamma_k p_{k+1} \equiv s_k$. Außerdem wählt man kanonisch $\beta_k = ||r_k||_2$.
Diskutieren Sie den Abbruch der Iteration und die dadurch gewonnenen Informationen falls

a) $r_k = 0$,

b) $s_k = 0$,

c) weder a) noch b) sind wahr und es gilt $s_k^T r_k = 0$ (*Breakdown*).

Zusatz: Geben Sie einen Startvektor an für den der Fall c) eintritt, sprich die unsymmetrische Lanzcos-Iteration bricht zusammen. Nutzen Sie dafür die Beispielmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Senden Sie Ihre Programme an `penke@mpi-magdeburg.mpg.de`. Der Dateiname sollte Ihren Namen und die zugehörige Hausaufgaben- und Aufgabenummer enthalten, z.B. `name_ha3auf3`. Im Fall mehrerer Programmdateien ist die Verwendung eines Dateiarchivierers empfehlenswert. Geben Sie außerdem bitte die Quellcodes Ihrer Programme in ausgedruckter Form zusammen mit den restlichen Aufgaben ab.