Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Wintersemester 2015/16
Dr. Sara Grundel
Carolin Penke

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 1. Übung

Aufgabe 1 **(Eigenwerte und Eigenvektoren)**

Bestimmen Sie zu folgenden Matrizen die Eigenwerte und die zugehörigen Eigen- und Hauptvektoren sowie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 15 & 9 \\ -16 & -9 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 2 **(Naive Methode zur numerischen Eigenwertberechnung)**

Wir untersuchen die numerische Berechnung der Eigenwerten einer Matrix A als Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms $\det(A-\lambda I)$. Generieren Sie sich dazu in MATLAB®mittels `A=diag(1:n)`, $n \in \mathbb{N}$ einfache Diagonalmatrizen. Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen als Nullstellen des charakteristischen Polynoms über den Befehl `roots(poly(A))`. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den exakten Eigenwerten für steigende Dimensionen (z.B. $n = 2, \ldots, 30$) indem Sie Real- und Imaginärteile der Eigenwerte im $\mathbb{R}^2$ plotten. Ist der verwendete Weg zur Eigenwertberechnung empfehlenswert?

Aufgabe 3 **(Die 6 Matrixzerlegungen)**

a) Wiederholen Sie Eigenschaften der folgenden sechs äußerst wichtigen Matrixfaktorisierungen:

- **i)** Cholesky-,
- **ii)** pivotisierte LU-,
- **iii)** QR-,
- **iv)** Spektral-,
- **v)** Schur- und
- **vi)** Singulärwertzerlegung (SVD).

Besprechen Sie dabei auch Existenz und Eindeutigkeit. Welche Algorithmen sind Ihnen für die einzelnen Zerlegungen bekannt?
Kennen Sie weitere wichtige Matrixzerlegungen?

b) Zeigen Sie, dass die dünne QR-Zerlegung $A = Q_1R_1$ eindeutig ist, falls $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $(m > n)$ vollen Spaltenrang hat. $Q_1 \in \mathbb{R}^{m,n}$ hat dabei orthonormale Spalten und $R_1 \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie außerdem, dass R_1 aus dem unteren Dreiecksfaktor G der Cholesky-Faktorisierung von A^TA durch die Identität $R_1 = G^T$ hervorgeht.

Aufgabe 4 (Singulärwertzerlegung)

Sei $s = \operatorname{rank}(A)$, $A = U\Sigma V^T$ die SVD , $U = [u_1, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind orthonormal. Beweise folgende Aussagen:

a) Falls $k < s$ und $A_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$, dann

$$\min_{\operatorname{rank}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

(*Hinweis:* Zeige zuerst, dass $\operatorname{rank}(A_k) = k$. Dann wähle eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\operatorname{rank}(B) = k$. Es existieren $x_1, \ldots, x_{n-k}$, so dass $\ker(B) = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-k}\}$ und es gilt: $\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{n-k}\} \cap \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k+1}\} \neq \{\emptyset\}$. Sei z mit $\|z\|_2 = 1$ ein Vektor dieser Durschnittsmenge, dann gilt $Bz = 0$. Mit der Konstruktion Az kann man die Abschätzung zeigen.)

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \ker(A) &= \operatorname{span}\{v_{s+1}, \ldots, v_n\} \\ \operatorname{im}(A) &= \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_s\}. \end{aligned}$$

c) Es gilt: $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_s^2}$.