Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Wintersemester 2015/16
Dr. Sara Grundel
Carolin Penke

# Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 2. Übung

**Aufgabe 1 (Lineare, zeitinvariante gewöhnliche Differentialgleichungssysteme)**

Wir betrachten Anfangswertprobleme der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),\ x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ f(t) \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

**a)** Geben sie eine mit Hilfe der Eigenwerte und Eigen- / Hauptvektoren von $A$ eine Darstellung für die homogene Lösung (also $f(t) \equiv 0$ in (1)) $x_h(t)$ an. Nennen Sie Lösungsstrategien für das inhomogene Problem.

**b)** Welche Aussagen über die Dynamik von (1) lassen sich direkt an den Eigenwerten von $A$ ablesen.

**c)** Führen Sie den in **a)** genannten Lösungsweg exemplarisch für das Anfangswertproblem mit der Matrix $F$ aus Aufgabe 1 von Übung 1 sowie mit

$$x(t_0 = 0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ f(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

durch.

**Aufgabe 2 (QR-Zerlegung)**

Berechnen Sie die $QR$-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 3 (Verallgemeinerte Schurzerlegung)**

Sei $A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann existieren unitäre Matrizen $Q$ und $Z$ so dass

$$Q^H BZ = S = \begin{bmatrix} \diagdown \end{bmatrix} \text{ und } Q^H AZ = T = \begin{bmatrix} \diagdown \end{bmatrix}.$$

Wenn für ein $k$ gilt $t_{kk} = s_{kk} = 0$, dann gilt für das Spektrum $\Lambda(A,\ B) = \mathbb{C}$ und das Paar $(A,\ B)$ nennt man dann *singulär*. Andererseits heißt $(A,\ B)$ *regulär* und

$$\Lambda(A,\ B) = \{\lambda_i := t_{ii}/s_{ii}\ :\ s_{ii} \neq 0\}\ \cup\ \{\lambda_i = \infty\ :\ s_{ii} = 0\}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrixpaare $(A,\ B)$ und untersuchen Sie ob sie regulär oder singulär sind.

**a)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

**b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

**c)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**d)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

### Aufgabe 4 (Householder Matrix)

Berechne eine Householder Matrix P so dass $Px = e_1$ für $x = [3, 1, 5, 1]$.
**Bemerkung:** Eine Householder Matrix ist eine Matrix der Form $P = I - \frac{2}{v^T v} v v^T$