Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Wintersemester 2015/16
Dr. Sara Grundel
Carolin Penke

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 3. Übung

Aufgabe 1 (Spectra von Matrixfunktionen)

a) Beweisen Sie das *spectral mapping theorem.*
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, wobei $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset D$ und D ein Gebiet in $\mathbb{C}$ sei. Dann gilt $\Lambda(f(A)) = \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\}$.

b) Beweisen sie den *Satz von Stephanos.*
Seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n},\ B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},\ \Lambda(B) = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$. Für ein Polynom $p(x, y) = \sum_{i,j=0}^{k} c_{ij} x^i y^j$ in zwei Veränderlichen sei durch

$$p(A; B) := \sum_{i,j=0}^{k} c_{ij}(A^i \otimes B^j)$$

ein Polynom der beiden Matrizen definiert. Dann gilt für das Spektrum von $p(A; B)$:

$$\Lambda(p(A; B)) = \{p(\lambda_r, \mu_s),\ r = 1, \dots, n,\ s = 1, \dots, m\}.$$

Aufgabe 2 (Rayleigh-Quotienten-Iteration)

Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Der Skalar $r(x) := \frac{x^T Ax}{x^T x}$ heißt der *Rayleigh-Quotient* zu x bzgl. A.
a) Zeigen Sie, dass $r(x)$ den Ausdruck $\|(A - \lambda I)x\|_2$ minimiert.
Zusatz: Wann entspricht $r(x)$ einem Eigenwert von A?
b) Programmieren Sie die Potenziteration, die inverse Iteration und die Rayleigh-Quotienten-Iteration und vergleichen sie diese anhand der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \end{bmatrix}, \quad B = \texttt{wilkinson}(n),$$

für verschiedene n (z.B. n=20,50,500).
Die Rayleigh-Quotienten-Iteration geht dabei aus der inversen Iteration durch Ersetzung des konstanten Shifts mit dem Rayleigh-Quotienten zur jeweils letzten Eigenvektoriterierten hervor.