Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg | Wintersemester 2015/16
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik | Dr. Sara Grundel
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme | Carolin Penke
Computational Methods for Systems and Control Theory

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 5. Übung

Aufgabe 1 (Krylovräume)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, q_1 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

a) $\{q_1, \ldots, A^{k-1}q_1\}$ sind linear abhängig.

b) $\mathcal{K}(A, q_1, k-1) = \mathcal{K}(A, q_1, k+\ell) \quad \forall \ell \geq 0$.

c) $\mathcal{K}(A, q_1, k-1)$ ist A-invarianter Unterraum.

Aufgabe 2 (Lanczos-Rekursion)

Mache Dir klar dass die Lanczos Rekursion

$$AQ_k = Q_k T_k + v_{k+1} e_k^T$$

direkt aus der Definition des Algorithmus folgt.

Aufgabe 3 (Beweis b) Satz 5.6)

Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $Ax_j = \lambda_j x_j$ wobei $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ and $x_j^T x_k = \delta_{jk}$. Weiterhin sei $T_k = T_k^T$ die Tridiagonalmatrix nach k Lanczos Schritten, dann gilt

$$\lambda_n < \Theta_k < \lambda_n + \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)\tan^2\phi_n}{(t_{k-1}(1+2\rho_n))^2}$$

wobei $\rho_n := \frac{\lambda_{n-1}-\lambda_n}{\lambda_2-\lambda_n}$ und $\phi_n := \arccos|q_n^T x_n|$ und $t_{k-1}(x)$ das Tchebycheff Polynom vom Grad $k-1$.