Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
Fakultät für Mathematik – Institut für Analysis und Numerik
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer technischer Systeme
Computational Methods for Systems and Control Theory

Wintersemester 2015/16
Dr. Sara Grundel
Carolin Penke

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 6. Übung

Aufgabe 1 (Verlust der Orthogonalität bei Arnoldi)

Schreiben Sie einen MATLAB-Code, der den Arnoldi-Algorithmus mit und ohne Reorthogonalisierung durchführt. Berechnen Sie für jede der folgenden Matrizen 100 Arnoldi-Schritte ohne Reorthogonalisierung. Dann berechnen Sie die inneren Produkte $q_1^* q_j$ für $j = 2, \dots, 100$. Beobachten Sie, wie die Orthogonalität sich mit zunehmenden j verschlechtert. Berechnen Sie auch $\|I_j - Q_j^* Q_j\|$ für $j = 100$, dass theoretisch Null sein müsste. Nun wiederholen Sie den Arnoldi-Prozess mit Reorthogonalisierung und berechnen Sie erneut $\|I_j - Q_j^* Q_j\|$.

a) Für den ersten Test benutzen Sie die Matrix `west0479`, die in MATLAB bereitgestellt wird. Dies ist eine nichtsymmetrische, schwach besetzte Matrix der Dimension 479.

```
>> load west0479
>> A = west0479;
>> spy(A)
```

b) Testen Sie nun eine Matrix zu einem diskreten negativen Laplaceoperator der Dimension 324 (gehört zum Inneren eines 20×20-Gitters). Diese schwach besetzte Matrix ist symmetrisch.

```
>> A = delsq(numgrid('S',20));
```

Aufgabe 2 (Konvergenz von Arnoldi)

Lassen Sie den Arnoldi-Prozess 40 Schritte für die Matrix `west0479` laufen. Um die Konvergenz des Arnoldi-Prozesses sichtbar zu machen, plotten Sie die Eigenwerte von `eig(A)` und die approximierten Eigenwerte nach 10, 20, 30 und 40 Arnoldi-Schritte. Was beobachten Sie?

Aufgabe 3 (Details Arnoldi-Algorithmus mit impliziten Neustarts)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $q_1 \in \mathbb{C}^n$, so dass der Arnoldi-Algorithmus für A mit Startvektor q_1 in den ersten m Schritten nicht abbricht, d.h. es gibt $Q_m = [q_1, \dots, q_m] \in \mathbb{C}^{n\times m}$ isometrisch und eine Hessenbergmatrix $H_m \in \mathbb{C}^{m\times m}$, so dass

$$AQ_m = Q_m H_m + h_{m+1,m} q_{m+1} e_m^T \quad \text{mit } h_{m+1,m} \neq 0.$$

Ferner seien U und R die Matrizen, die man nach ℓ Schritten des QR-Algorithmus mit Shifts $\nu_1, \dots, \nu_\ell$ für A erhält (vgl. Vorlesung), sowie $p(t) = (t - \nu_1) \cdots (t - \nu_\ell)$, $1 \leq \ell \leq m$. Zeigen Sie durch Induktion nach ℓ:

a) $p(H_m) = UR$.

b) $p(A)Q_m = Q_m p(H_m) + F_m$, wobei

$$F_m = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m-\ell & \ell \end{array} \\ n & \begin{bmatrix} 0 & \tilde{F}_m \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{und} \quad Q_m^* F_m = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m-\ell+1 & \ell-1 \end{array} \\ n & \begin{bmatrix} 0 & \hat{F}_m \end{bmatrix} \end{array}.$$

Zusatz:
Zeigen Sie weiterhin, dass das charakteristische Polynom p_m von H_m das eindeutig bestimmte normierte Polynom vom Grad kleiner gleich m ist, so dass

$$\|p_m(A)q_1\| = \min\left\{\|p(A)q_1\| : p \in \Pi_m, p \text{ normiert}\right\}.$$

(Hinweis: Beobachten Sie, dass $p(A)q_1 = A^m q_1 - Q_m y$ für $y \in \mathbb{C}^m$, d.h. $p(A)q_1$ ist der Abstand von $A^m q_1$ zum Punkt $Q_m y$ im Unterraum $\mathcal{K}_m(A, q_1)$. Was bedeutet die Minimalitätsaussage geometrisch?)