Das Newton-Verfahren zur Nullstellensuche reeller Funktionen

Wir suchen ein Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle x_* der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Idee des Newton-Verfahrens ist nun f durch ihr Taylorpolynom erster Ordnung (Tangente) in einem Startpunkt x_0 zu approximieren. Als erste Näherung der Nullstelle von f wählen wir dann die Nullstelle der Tangente p(x).

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ist f im Punkt x_0 differenzierbar und ist $f'(x_0) \neq 0$ dann gilt:

$$0 = p(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Die widerholte Anwendung der Vorschrift

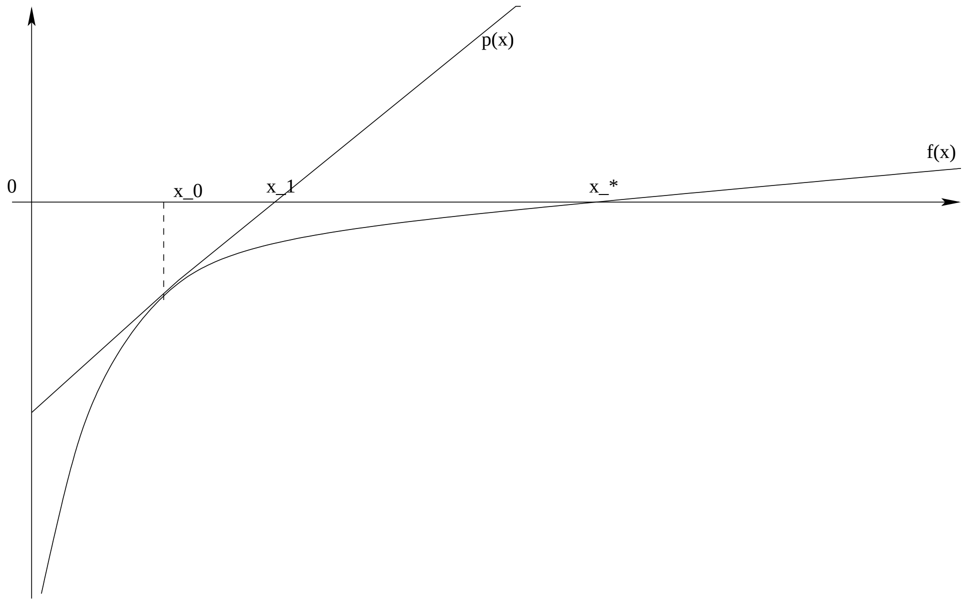

Abbildung 1: Idee des Newtonverfahrens in $\mathbb{R}$

$$x_k + 1 = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

führt nun unter geeigneten Annahmen an Startwert und Funktion zur Nullstelle x_*. Es handelt sich hier um eine Fixpunktiteration, denn ist für $K \in \mathbb{Z}$ die Nullstelle $x_* = x_K$ so gilt offensichtlich

$$x_{K+1} = x_* - \frac{f(x_*)}{f'(x_*)} = x_* - \frac{0}{f'(x_*)} = x_*$$

und damit $x_{K+1} = x_K$. x_* ist also ein Fixpunkt der Iterationsvorschrift.