Grenzwerte von Funktionen

Definition

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

$$:\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Grenzwertsätze

Für $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_1$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A_2$ gilt

Grenzwert bei Summenfunktionen

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A_1 \pm A_2$$

Grenzwert für Produkte von Funktionen

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A_1 \cdot A_2$$

Grenzwert für Quotienten von Funktionen

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{A_1}{A_2}$$

L'Hospitalsche Regel

Falls für den Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ der Zähler $f(x)$ und der Nenner $g(x)$ gleichzeitig gegen 0, oder $\pm\infty$ konvergieren, so ist der Grenzwert des Quotienten a priori unbestimmt (ggf. sogar nicht existent).
Es gilt jedoch:

L'Hospitalsche Regel

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)'}{g(x)'} \right] = C \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = C$$

Beachte: Es folgt natürlich direkt durch sukzessives Anwenden:

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)^{(n)}}{g(x)^{(n)}} \right] = C \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = C$$