Workshop des GMA-FA 1.30,
Anif, 18.–20. September 2013

Modellreduktion für strukturierte Index-3-Systeme

J. Saak
joint work with
M. M. Uddin and M. Voigt

Computational Methods in Systems and Control Theory (CSC)
Max-Planck-Institut für Dynamik komplexer Technischer Systeme

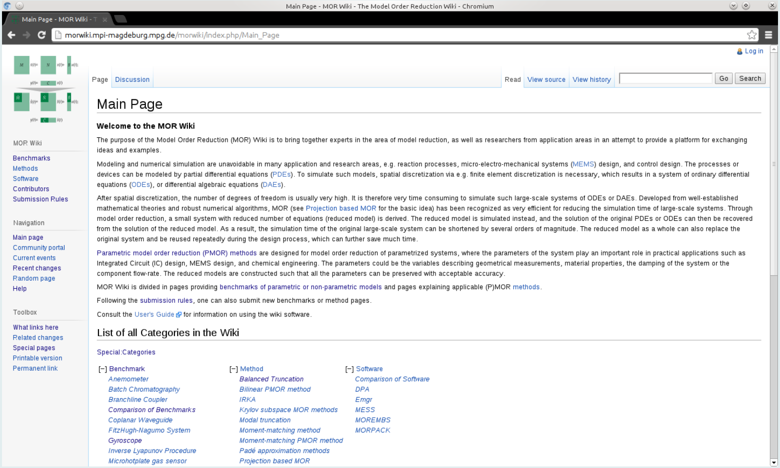
Gliederung

Werbung

Werbung

MOR Wiki

http://www.modelreduction.org


Main Page - MOR Wiki - The Model Order Reduction Wiki - Chromium

Main Page - MOR Wiki - T

morwiki.mpi-magdeburg.mpg.de/morwiki/index.php/Main_Page

Log in

Page | Discussion | Read | View source | View history | Go | Search

MOR Wiki
- Benchmarks
- Methods
- Software
- Contributors
- Submission Rules

Navigation
- Main page
- Community portal
- Current events
- Recent changes
- Random page
- Help

Toolbox
- What links here
- Related changes
- Special pages
- Printable version
- Permanent link

Main Page

Welcome to the MOR Wiki

The purpose of the Model Order Reduction (MOR) Wiki is to bring together experts in the area of model reduction, as well as researchers from application areas in an attempt to provide a platform for exchanging ideas and examples.

Modeling and numerical simulation are unavoidable in many application and research areas, e.g. reaction processes, micro-electro-mechanical systems (MEMS) design, and control design. The processes or devices can be modeled by partial differential equations (PDEs). To simulate such models, spatial discretization via e.g. finite element discretization is necessary, which results in a system of ordinary differential equations (ODEs), or differential algebraic equations (DAEs).

After spatial discretization, the number of degrees of freedom is usually very high. It is therefore very time consuming to simulate such large-scale systems of ODEs or DAEs. Developed from well-established mathematical theories and robust numerical algorithms, MOR (see Projection based MOR for the basic idea) has been recognized as very efficient for reducing the simulation time of large-scale systems. Through model order reduction, a small system with reduced number of equations (reduced model) is derived. The reduced model is simulated instead, and the solution of the original PDEs or ODEs can then be recovered from the solution of the reduced model. As a result, the simulation time of the original large-scale system can be shortened by several orders of magnitude. The reduced model as a whole can also replace the original system and be reused repeatedly during the design process, which can further save much time.

Parametric model order reduction (PMOR) methods are designed for model order reduction of parametrized systems, where the parameters of the system play an important role in practical applications such as Integrated Circuit (IC) design, MEMS design, and chemical engineering. The parameters could be the variables describing geometrical measurements, material properties, the damping of the system or the component flow-rate. The reduced models are constructed such that all the parameters can be preserved with acceptable accuracy.

MOR Wiki is divided in pages providing benchmarks of parametric or non-parametric models and pages explaining applicable (P)MOR methods.

Following the submission rules, one can also submit new benchmarks or method pages.

Consult the User's Guide for information on using the wiki software.

List of all Categories in the Wiki

Special:Categories

[–] Benchmark
- *Anemometer*
- *Batch Chromatography*
- *Branchline Coupler*
- *Comparison of Benchmarks*
- *Coplanar Waveguide*
- *FitzHugh-Nagumo System*
- *Gyroscope*
- *Inverse Lyapunov Procedure*
- *Microhotplate gas sensor*

[–] Method
- *Balanced Truncation*
- *Bilinear PMOR method*
- *IRKA*
- *Krylov subspace MOR methods*
- *Modal truncation*
- *Moment-matching method*
- *Moment-matching PMOR method*
- *Padé approximation methods*
- *Projection based MOR*

[–] Software
- *Comparison of Software*
- *DPA*
- *Emgr*
- *MESS*
- *MOREMBS*
- *MORPACK*

Werbung

Model Reduction of Complex Dynamical Systems (ModRed 2013)

Date: December 11–13, 2013

Venue: Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Sandtorstraße 1, 39106 Magdeburg, Germany

Invited speakers: Karl Meerbergen (KU Leuven), Jan S. Hesthaven (Brown University), Romanus Dyczij-Edlinger (Universität des Saarlandes)

Deadlines: October 1st, 2013: Submission of abstracts
November 1st, 2013: Registration

Contact: modred2013@mpi-magdeburg.mpg.de

www.mpi-magdeburg.mpg.de/mpcsc/events/ModRed/2013/

SPONSORED BY THE Federal Ministry of Education and Research

Einleitung

Einleitung

Wir betrachten die Klassen von differentiell-algebraischen Systemen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi}(t) &= D\dot{\xi}(t) + K\xi(t) - G_1^T\mu_1(t) - G_2^T\mu_2(t) + B_1u(t), \\ 0 &= G_1\xi(t) + G_2\dot{\xi}(t), \\ y(t) &= C_1\xi(t) + C_2\dot{\xi}(t), \end{aligned}$$

für die Verschiebung ξ mit

Einleitung

Wir betrachten die Klassen von differentiell-algebraischen Systemen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi}(t) &= D\dot{\xi}(t) + K\xi(t) - G_1^T\mu_1(t) - G_2^T\mu_2(t) + B_1u(t), \\ 0 &= G_1\xi(t) + G_2\dot{\xi}(t), \\ y(t) &= C_1\xi(t) + C_2\dot{\xi}(t), \end{aligned}$$

für die Verschiebung ξ mit

- dünn besetzten Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen $M, D, K \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$,

Einleitung

Wir betrachten die Klassen von differentiell-algebraischen Systemen zweiter Ordnung

$$
\begin{aligned}
M\ddot{\xi}(t) &= D\dot{\xi}(t) + K\xi(t) - G_1^T\mu_1(t) - G_2^T\mu_2(t) + B_1u(t),\\
\boxed{0 = G_1\xi(t) + G_2\dot{\xi}(t),}&\\
y(t) &= C_1\xi(t) + C_2\dot{\xi}(t),
\end{aligned}
$$

für die Verschiebung ξ mit

- dünn besetzten Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen $M, D, K \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$,
- algebraischen Beschränkungen gegeben durch $G_i \in \mathbb{R}^{n_{\mu_i} \times n_\xi}$ und Lagrange-Multiplikatoren μ_i. $(i \in \{1, 2\})$ und $n_{\mu_i} < n_\xi$,

Einleitung

Wir betrachten die Klassen von differentiell-algebraischen Systemen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} M\ddot{\xi}(t) &= D\dot{\xi}(t) + K\xi(t) - G_1^T\mu_1(t) - G_2^T\mu_2(t) + B_1u(t), \\ 0 &= G_1\xi(t) + G_2\dot{\xi}(t), \\ y(t) &= C_1\xi(t) + C_2\dot{\xi}(t), \end{aligned}$$

für die Verschiebung ξ mit

- dünn besetzten Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen $M, D, K \in \mathbb{R}^{n_\xi \times n_\xi}$,
- algebraischen Beschränkungen gegeben durch $G_i \in \mathbb{R}^{n_{\mu_i} \times n_\xi}$ und Lagrange-Multiplikatoren μ_i. ($i \in \{1, 2\}$) und $n_{\mu_i} < n_\xi$,
- sowie Ein- und Ausgangsmatrizen $B_1 \in \mathbb{R}^{n_\xi \times m}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{q \times n_\xi}$.

Einleitung

Phasenraumdarstellung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ K & D & -(G_1^T + G_2^T) \\ G_1 & G_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} u(t),$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}}_{x(t)},$$

Einleitung

Phasenraumdarstellung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ K & D & -G_2^T \\ 0 & G_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} u(t),$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}}_{x(t)},$$

Interessieren uns für zwei besondere Fälle:

- Fall 1: Index-2-DAE, d.h. G_2 hat vollen Rang und $G_1 = 0 \Leftrightarrow \mu = \mu_2$.

Einleitung

Phasenraumdarstellung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ K & D & -G_1^T \\ G_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} u(t),$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix}}_{x(t)},$$

Interessieren uns für zwei besondere Fälle:

- Fall 1: Index-2-DAE, d.h. G_2 hat vollen Rang und $G_1 = 0 \Leftrightarrow \mu = \mu_2$.
- Fall 2: Index-3-DAE, d.h. G_1 hat vollen Rang und $G_2 = 0 \Leftrightarrow \mu = \mu_1$.

Einleitung

Balanciertes Abschneiden für Standard Zustandsraumsysteme

Balanciertes Abschneiden (BT) hier: E invertierbar

- $\Sigma(E; A, B, C)$, heißt balanciert, falls die Lösungen P, Q der verallgemeinerten algebraischen Lyapunovgleichungen (GALE)

$$APE^T + EPA^T + BB^T = 0, \qquad A^TQE + E^TQA + C^TC = 0,$$

$P = Q = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n > 0$ erfüllen.

- $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ sind die Hankel-Singulärwerte von Σ.
- Balancierte Realisierung durch Zustandsraumtransformation

$$\begin{aligned}\mathcal{T} : (E; A, B, C) &\mapsto (TET^{-1}; TAT^{-1}, TB, CT^{-1}) \\ &= \left(\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right).\end{aligned}$$

- Abschneiden $\rightsquigarrow$ reduziertes Modell:
  $(\hat{E}; \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) = (E_{11}; A_{11}, B_1, C_1)$.

Einleitung

Balanciertes Abschneiden für Standard Zustandsraumsysteme

Implementierung: SR (square root) Methode hier: E invertierbar

1. Berechne (Cholesky-)Faktoren der Lösungen der Lyapunovgleichungen,
$$P = S^T S, \quad Q = R^T R.$$
2. Berechne Singulärwertzerlegung (SVD)
$$SER^T = [\,U_1,\; U_2\,] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}.$$
3. Definiere
$$W := R^T V_1 \Sigma_1^{-1/2}, \qquad V := S^T U_1 \Sigma_1^{-1/2}.$$
4. Das reduzierte Modell ist: $(W^T AV, W^T B, CV)$.

Einleitung

BT für allgemeine DAEs

E singulär $\rightsquigarrow$ Spektralprojektor BT — z.B. [Stykel '04]

Berechne Systemgramsche als Lösung projezierter Lyapunovgleichungen, d.h.,

1. zusätliche Projektion auf invariante Unterräume zu endlichen bzw. unendlichen Eigenwerten in $\Lambda_f(E, A)$, $\Lambda_\infty(E, A)$ nötig,

Einleitung

BT für allgemeine DAEs

E singulär $\rightsquigarrow$ Spektralprojektor BT — z.B. [Stykel '04]

Berechne Systemgramsche als Lösung projezierter Lyapunovgleichungen, d.h.,

1. zusätliche Projektion auf invariante Unterräume zu endlichen bzw. unendlichen Eigenwerten in $\Lambda_f(E, A)$, $\Lambda_\infty(E, A)$ nötig,
2. es müssen Beobachtbarkeits- sowie Steuerbarkeitsgramsche bezüglich $\Lambda_f(E, A)$ und $\Lambda_\infty(E, A)$ berechnet werden.

Einleitung

BT für allgemeine DAEs

E singulär $\rightsquigarrow$ Spektralprojektor BT z.B. [Stykel '04]

Berechne Systemgramsche als Lösung projezierter Lyapunovgleichungen, d.h.,

1. zusätliche Projektion auf invariante Unterräume zu endlichen bzw. unendlichen Eigenwerten in $\Lambda_f(E, A)$, $\Lambda_\infty(E, A)$ nötig,
2. es müssen Beobachtbarkeits- sowie Steuerbarkeitsgramsche bezüglich $\Lambda_f(E, A)$ und $\Lambda_\infty(E, A)$ berechnet werden.

- Berechne je 2 (zum properen und improperen Teil) Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsgramsche.
- Spektralprojektoren im allgemeinen nur in Spezialfällen direkt verfügbar.

Einleitung

Ausweg

Strukturausnutzung mittels versteckter Mannigfaltigkeit

- Suche einen Projektor der mittels Struktur aus Systemdaten einfacher berechenbar ist. (Strukturausnutzung mittels versteckter Mannigfaltigkeit)
- Wende Standard-BT auf das projezierte System an.
- Löse dazu die verallgemeinerten Lyapunovgleichungen aus den projezierten Matrizen.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Strukturierte Index-2-Systeme [HEINKENSCHLOSS/SORENSEN/SUN '08]

Fokus: Index-2-DAEs der Struktur

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_v \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = C_v v(t) + C_p p(t).$$

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Strukturierte Index-2-Systeme [Heinkenschloss/Sorensen/Sun '08]

Fokus: Index-2-DAEs der Struktur

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_v \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = C_v v(t) + C_p p(t).$$

Druckelimination

$$\begin{aligned} Gv = 0 \Rightarrow G\frac{d}{dt}v &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= GE^{-1}Av(t) - GE^{-1}G^T p(t) + GE^{-1}B_v u(t), \end{aligned}$$

und daher

$$p(t) = (GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}Av(t) + (GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}B_v u(t).$$

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Strukturierte Index-2-Systeme [Heinkenschloss/Sorensen/Sun '08]

Fokus: Index-2-DAEs der Struktur

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_v \\ 0 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y(t) = C_v v(t) + C_p p(t).$$

Druckelimination

$$p(t) = (GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}Av(t) + (GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}B_v u(t).$$

Einsetzen liefert

$$E\dot{v}(t) = \Pi A v(t) + \Pi B u(t)$$

mit

$$\Pi = I - G^T(GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}.$$

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Projektoreigenschaften

$$\Pi = I - G^T(GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}$$

Es gilt:

- $\Pi^2 = \Pi$ (Π is ein Projektor)

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Projektoreigenschaften

$$\Pi = I - G^T(GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}$$

Es gilt:

- $\Pi^2 = \Pi$ (Π is ein Projektor)
- $\Pi E = E\Pi^T$ (Π is E-orthogonal)

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Projektoreigenschaften

$$\Pi = I - G^T(GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}$$

Es gilt:

- $\Pi^2 = \Pi$ (Π is ein Projektor)
- $\Pi E = E\Pi^T$ (Π is E-orthogonal)
- $\mathrm{Bild}(\Pi) = \mathrm{Kern}(GE^{-1})$

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Projektoreigenschaften

$$\Pi = I - G^T(GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}$$

Es gilt:

- $\Pi^2 = \Pi$ (Π is ein Projektor)
- $\Pi E = E\Pi^T$ (Π is E-orthogonal)
- $\mathrm{Bild}(\Pi) = \mathrm{Kern}(GE^{-1})$
- $\mathrm{Kern}(\Pi) = \mathrm{Bild}(G^T)$

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Projektoreigenschaften

$$\Pi = I - G^T(GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1}$$

Es gilt:

- $\Pi^2 = \Pi$ (Π is ein Projektor)
- $\Pi E = E\Pi^T$ (Π is E-orthogonal)
- $\text{Bild}(\Pi) = \text{Kern}(GE^{-1})$
- $\text{Kern}(\Pi) = \text{Bild}(G^T)$

Insbesondere folgt daraus:

$$Gv(t) = 0 \Leftrightarrow \Pi^T v(t) = v(t),$$

d.h. $v(t)$ erfüllt die Beschränkungen genau dann, wenn es invariant unter dem Projektor Π^T ist.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Technischer Trick

Verwenden nun das projezierte System

$$\Pi E \Pi^T \dot{v}(t) = \Pi A \Pi^T v(t) + \Pi B u(t)$$

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Technischer Trick

Verwenden nun das projezierte System

$$\Pi E \Pi^T \dot{v}(t) = \Pi A \Pi^T v(t) + \Pi B u(t)$$

Problem

Die Dynamik unter Π ist auf die richtige Manigfaltigkeit eingeschränkt, aber $\Pi E \Pi^T = \Pi^2 E = \Pi E$ ist singulär.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Technischer Trick

Verwenden nun das projezierte System

$$\Pi E \Pi^T \dot{v}(t) = \Pi A \Pi^T v(t) + \Pi B u(t)$$

Problem

Die Dynamik unter Π ist auf die richtige Manigfaltigkeit eingeschränkt, aber $\Pi E \Pi^T = \Pi^2 E = \Pi E$ ist singulär.

Ausweg

$\Pi =: \Theta_l \Theta_r^T$ mit

- $r = \text{Rang}(\Pi)$, $\Theta_r^T \Theta_l = I_r$, also
- $\Theta_l \in \mathbb{R}^{n_v \times r}$, $\Theta_r \in \mathbb{R}^{r \times n_v}$.

Dann ist $\Theta_r^T E \Theta_r =: \tilde{E} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ invertierbar.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Resultierende Modellreduktionsverfahren

MOR für "Θ-projeziertes" System

Wir können jetzt Standard-MOR-Verfahren auf das ODE-System

$$\Theta_r^T E \Theta_r \Theta_l^T \dot{v}(t) = \Theta_r^T A \Theta_r \Theta_l^T v(t) + \Theta_r^T B u(t),$$
$$y(t) = C \Theta_r \Theta_l^T v(t),$$

anwenden.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Resultierende Modellreduktionsverfahren

MOR für "Θ-projeziertes" System

Wir können jetzt Standard-MOR-Verfahren auf das ODE-System

$$\Theta_r^T E \Theta_r \Theta_l^T \dot{v}(t) = \Theta_r^T A \Theta_r \Theta_l^T v(t) + \Theta_r^T B u(t),$$

$$y(t) = C \Theta_r \Theta_l^T v(t),$$

anwenden.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Resultierende Modellreduktionsverfahren

MOR für "Θ-projeziertes" System

Wir können jetzt Standard-MOR-Verfahren auf das ODE-System

$$\tilde{E}\dot{\tilde{v}}(t) = \tilde{A}\tilde{v}(t) + \tilde{B}u(t),$$
$$y(t) = \tilde{C}\tilde{v}(t),$$

anwenden.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Resultierende Modellreduktionsverfahren

MOR für "Θ-projeziertes" System

Wir können jetzt Standard-MOR-Verfahren auf das ODE-System

$$\tilde{E}\dot{\tilde{v}}(t) = \tilde{A}\tilde{v}(t) + \tilde{B}u(t),$$
$$y(t) = \tilde{C}\tilde{v}(t),$$

anwenden.

Wichtige Bemerkungen [Heinkenschloss/Sorensen/Sun '08]

- Dieses System dient nur der theoretischen Herleitung und muß in der Praxis nie aufgestellt werden.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Resultierende Modellreduktionsverfahren

MOR für "Θ-projeziertes" System

Wir können jetzt Standard-MOR-Verfahren auf das ODE-System

$$\tilde{E}\dot{\tilde{v}}(t) = \tilde{A}\tilde{v}(t) + \tilde{B}u(t),$$
$$y(t) = \tilde{C}\tilde{v}(t),$$

anwenden.

Wichtige Bemerkungen [Heinkenschloss/Sorensen/Sun '08]

- Dieses System dient nur der theoretischen Herleitung und muß in der Praxis nie aufgestellt werden.
- Die Lyapunovgleichungen

$$\tilde{A}P\tilde{E}^T + \tilde{E}P\tilde{A}^T = -\tilde{B}\tilde{B}^T \text{ und } \tilde{A}^T Q\tilde{E} + \tilde{E}^T Q\tilde{A} = -\tilde{C}^T\tilde{C}$$

werden gelöst ohne aufgestellt zu werden.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Resultierende Modellreduktionsverfahren

MOR für "Θ-projeziertes" System

Wir können jetzt Standard-MOR-Verfahren auf das ODE-System

$$\tilde{E}\dot{\tilde{v}}(t) = \tilde{A}\tilde{v}(t) + \tilde{B}u(t),$$
$$y(t) = \tilde{C}\tilde{v}(t),$$

anwenden.

Wichtige Bemerkungen [Heinkenschloss/Sorensen/Sun '08]

- Wesentlicher Schritt des Reduktionsverfahrens

$$(\tilde{A} + p_i\tilde{E})V = W,$$

wird zurückgeführt auf Originaldaten

$$\begin{bmatrix} A + p_i E & -G^T \\ G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}$$

.

BT für Stokesartige Systeme erster Ordnung

Resultierende Modellreduktionsverfahren

MOR für "Θ-projeziertes" System

Wir können jetzt Standard-MOR-Verfahren auf das ODE-System

$$\tilde{E}\dot{\tilde{v}}(t) = \tilde{A}\tilde{v}(t) + \tilde{B}u(t),$$
$$y(t) = \tilde{C}\tilde{v}(t),$$

anwenden.

Wichtige Bemerkungen [Gugercin/Stykel/Wyatt '13]

- Nicht auf das balancierte Abschneiden beschränkt. Erweiterung auf interpolationsbasierte Modellreduktion möglich.

Index-2-DAE zweiter Ordnung

Index-2-DAE zweiter Ordnung

Anwendung bei Systemen in Phasenraumdarstellung [S./Uddin/Voigt '13]

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ K & D & -G_2^T \\ 0 & G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Index-2-DAE zweiter Ordnung

Anwendung bei Systemen in Phasenraumdarstellung

[S./Uddin/Voigt '13]

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ K & D & -G_2^T \\ 0 & G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Setze

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ K & D \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & G_2 \end{bmatrix}.$$

Index-2-DAE zweiter Ordnung

Anwendung bei Systemen in Phasenraumdarstellung [S./Uddin/Voigt '13]

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ K & D & -G_2^T \\ 0 & G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Setze

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ K & D \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & G_2 \end{bmatrix}.$$

$$\Pi = I - G^T(GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1} \qquad .$$

Index-2-DAE zweiter Ordnung

Anwendung bei Systemen in Phasenraumdarstellung [S./Uddin/Voigt '13]

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ K & D & -G_2^T \\ 0 & G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Setze

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ K & D \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & G_2 \end{bmatrix}.$$

$$\Pi = I - G^T(GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I - G_2^T(G_2M^{-1}G_2^T)^{-1}G_2M^{-1} \end{bmatrix}.$$

Index-2-DAE zweiter Ordnung

Anwendung bei Systemen in Phasenraumdarstellung [S./Uddin/Voigt '13]

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ K & D & -G_2^T \\ 0 & G_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \mu(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Setze

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ K & D \end{bmatrix}, \qquad G = \begin{bmatrix} 0 & G_2 \end{bmatrix}.$$

$$\Pi = I - G^T(GE^{-1}G^T)^{-1}GE^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Pi_{\dot{\xi}} \end{bmatrix}.$$

Index-3-DAE zweiter Ordnung

Index-3-DAE zweiter Ordnung

Lehren aus dem Index-2-Fall [S./Uddin/Voigt '13]

Grundidee

Verwende die Beobachtung zu Π, bzw. $\Pi_{\dot{\xi}}$ aus dem Index-2-Fall zur Definition eines geeigneten Projektors für den Index-3-Fall.

Index-3-DAE zweiter Ordnung

Lehren aus dem Index-2-Fall [S./Uddin/Voigt '13]

Grundidee

Verwende die Beobachtung zu Π, bzw. Π_{ξ} aus dem Index-2-Fall zur Definition eines geeigneten Projektors für den Index-3-Fall.

Index-2 $\rightsquigarrow$ Index-3

- $\Pi_{\dot\xi} = I - G_2^T(G_2M^{-1}G_2^T)^{-1}G_2M^{-1}$ agiert auf $\dot\xi(t)$, da G_2 Geschwindigkeitsbeschränkungen beschreibt.

Index-3-DAE zweiter Ordnung

Lehren aus dem Index-2-Fall [S./Uddin/Voigt '13]

Grundidee

Verwende die Beobachtung zu Π, bzw. $\Pi_{\dot{\xi}}$ aus dem Index-2-Fall zur Definition eines geeigneten Projektors für den Index-3-Fall.

Index-2 $\rightsquigarrow$ Index-3

- $\Pi_{\dot{\xi}} = I - G_2^T(G_2M^{-1}G_2^T)^{-1}G_2M^{-1}$ agiert auf $\dot{\xi}(t)$, da G_2 Geschwindigkeitsbeschränkungen beschreibt.
- G_1 definiert Zustandsbeschränkungen, damit operiert

$$\Pi_{\xi} := I - G_1^T(G_1M^{-1}G_1^T)^{-1}G_1M^{-1}$$

auf $\xi(t)$.

Index-3-DAE zweiter Ordnung

Lehren aus dem Index-2-Fall

[S./Uddin/Voigt '13]

Grundidee

Verwende die Beobachtung zu Π, bzw. $\Pi_{\dot{\xi}}$ aus dem Index-2-Fall zur Definition eines geeigneten Projektors für den Index-3-Fall.

Index-2 $\rightsquigarrow$ Index-3

- $\Pi_{\dot{\xi}} = I - G_2^T(G_2 M^{-1} G_2^T)^{-1} G_2 M^{-1}$ agiert auf $\dot{\xi}(t)$, da G_2 Geschwindigkeitsbeschränkungen beschreibt.
- G_1 definiert Zustandsbeschränkungen, damit operiert

$$\Pi_{\xi} := I - G_1^T(G_1 M^{-1} G_1^T)^{-1} G_1 M^{-1}$$

  auf $\xi(t)$.
- Es gilt wieder $\frac{d}{dt}(\Pi_{\xi}\xi(t)) = \Pi_{\xi}\dot{\xi}(t)$ und daher

$$\xi(t) = \Pi_{\xi}\xi(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\xi}(t) = \Pi_{\xi}\dot{\xi}(t).$$

Index-3-DAE zweiter Ordnung

Der Index-3-Projektor

[S./Uddin/Voigt '13]

Definiere

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_\xi & 0 \\ 0 & \Pi_\xi \end{bmatrix} = \Theta_l \Theta_r^T := \begin{bmatrix} \Theta_{l,\xi} & 0 \\ 0 & \Theta_{l,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{r,\xi} & 0 \\ 0 & \Theta_{r,\xi} \end{bmatrix}^T$$

Index-3-DAE zweiter Ordnung

Der Index-3-Projektor

[S./Uddin/Voigt '13]

Definiere

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_\xi & 0 \\ 0 & \Pi_\xi \end{bmatrix} = \Theta_l \Theta_r^T := \begin{bmatrix} \Theta_{l,\xi} & 0 \\ 0 & \Theta_{l,\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{r,\xi} & 0 \\ 0 & \Theta_{r,\xi} \end{bmatrix}^T$$

Theorem ([S./Uddin/Voigt '13])

Der Projektor Π, sowie die Projektion durch Θ_r erhalten die endliche Eigenstruktur des Büschels $\lambda\mathcal{E} - \mathcal{A}$.

Zusammenfassung und Literatur

Zusammenfassung und Literatur

Zusammenfassung

Heute vogestellt

- Beschreibung strukturierter DAE Systeme zweiter Ordnung,

Zusammenfassung und Literatur

Zusammenfassung

Heute vogestellt

- Beschreibung strukturierter DAE Systeme zweiter Ordnung,
- Nachteile Spektralprojektor-basierter Methoden,

Zusammenfassung und Literatur

Zusammenfassung

Heute vogestellt

- Beschreibung strukturierter DAE Systeme zweiter Ordnung,
- Nachteile Spektralprojektor-basierter Methoden,
- Revision von Verfahren für strukturierte Index-2-DAE erster Ordnung,

Zusammenfassung und Literatur

Zusammenfassung

Heute vogestellt

- Beschreibung strukturierter DAE Systeme zweiter Ordnung,
- Nachteile Spektralprojektor-basierter Methoden,
- Revision von Verfahren für strukturierte Index-2-DAE erster Ordnung,
- Anwendung und Erweiterung auf die untersuchten Index-2- und Index-3-DAE-Systeme zweiter Ordnung.

Zusammenfassung und Literatur

Zusammenfassung

Heute vogestellt

- Beschreibung strukturierter DAE Systeme zweiter Ordnung,
- Nachteile Spektralprojektor-basierter Methoden,
- Revision von Verfahren für strukturierte Index-2-DAE erster Ordnung,
- Anwendung und Erweiterung auf die untersuchten Index-2- und Index-3-DAE-Systeme zweiter Ordnung.

Weitere Arbeiten

Zusammenfassung und Literatur

Zusammenfassung

Heute vogestellt

- Beschreibung strukturierter DAE Systeme zweiter Ordnung,
- Nachteile Spektralprojektor-basierter Methoden,
- Revision von Verfahren für strukturierte Index-2-DAE erster Ordnung,
- Anwendung und Erweiterung auf die untersuchten Index-2- und Index-3-DAE-Systeme zweiter Ordnung.

Weitere Arbeiten

- rudimentäre Implementierung für einfache Masse-Feder-Dämpfer-Ketten erweitern zu Produktionscode,

Zusammenfassung und Literatur

Zusammenfassung

Heute vogestellt

- Beschreibung strukturierter DAE Systeme zweiter Ordnung,
- Nachteile Spektralprojektor-basierter Methoden,
- Revision von Verfahren für strukturierte Index-2-DAE erster Ordnung,
- Anwendung und Erweiterung auf die untersuchten Index-2- und Index-3-DAE-Systeme zweiter Ordnung.

Weitere Arbeiten

- rudimentäre Implementierung für einfache Masse-Feder-Dämpfer-Ketten erweitern zu Produktionscode,
- Einbindung neuester Erkenntnisse zum Lyapunov-Löser in diese Codes,

Zusammenfassung und Literatur

Zusammenfassung

Heute vogestellt

- Beschreibung strukturierter DAE Systeme zweiter Ordnung,
- Nachteile Spektralprojektor-basierter Methoden,
- Revision von Verfahren für strukturierte Index-2-DAE erster Ordnung,
- Anwendung und Erweiterung auf die untersuchten Index-2- und Index-3-DAE-Systeme zweiter Ordnung.

Weitere Arbeiten

- rudimentäre Implementierung für einfache Masse-Feder-Dämpfer-Ketten erweitern zu Produktionscode,
- Einbindung neuester Erkenntnisse zum Lyapunov-Löser in diese Codes,
- Anwendung auf praxisnahe und praxisrelevante Modelle.

Zusammenfassung und Literatur

Literatur

- S. Gugercin, T. Stykel, and S. Wyatt, *Model reduction of descriptor systems by interpolatory projection methods*, tech. rep., arXiv, 2013.
  http://arxiv.org/abs/1301.4524.
- M. Heinkenschloss, D. Sorensen, and K. Sun, *Balanced truncation model reduction for a class of descriptor systems with applications to the Oseen equations*, SIAM J. Sci. Comput., 30 (2008), pp. 1038–1063.
- J. Saak, M. M. Uddin, and M. Voigt, *Balancing based model order reduction for differential-algebraic equations in mechanical applications*, tech. rep., MPI Magdeburg, 2013.
  in Vorbereitung.

Zusammenfassung und Literatur

Literatur

S. Gugercin, T. Stykel, and S. Wyatt, *Model reduction of descriptor systems by interpolatory projection methods*, tech. rep., arXiv, 2013.
http://arxiv.org/abs/1301.4524.

M. Heinkenschloss, D. Sorensen, and K. Sun, *Balanced truncation model reduction for a class of descriptor systems with applications to the Oseen equations*, SIAM J. Sci. Comput., 30 (2008), pp. 1038–1063.

J. Saak, M. M. Uddin, and M. Voigt, *Balancing based model order reduction for differential-algebraic equations in mechanical applications*, tech. rep., MPI Magdeburg, 2013.
in Vorbereitung.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!