# Numerische Verfahren zur optimalen Steuerung von parabolischen PDEs

Jens Saak
in Zusammenarbeit mit
Hermann Mena (EPN Quito Ecuador)
Peter Benner und Sabine Görner (MiIT)

Mathematik in Industrie und Technik
Fakultät für Mathematik
TU Chemnitz

21.02.2007

# Gliederung

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## Parabolische PDE und abstrakte Cauchy-Probleme

Betrachten ein Regelungssystem für eine

### Parabolische partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}(\mathbf{x}) - \mathbf{k}(\nabla \mathbf{x})) + \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\xi, t), \quad t \in [0, T_f], \quad \text{(PDE)}$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3.$

Dabei sind:

- **q** ungesteuerte Quelle/Senke
- **k** Diffusionsanteil
- **c** Konvektionsanteil

Der Übersichtlichkeit halber hier $T_f = \infty$.

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## Parabolische PDE und abstrakte Cauchy-Probleme

Betrachten ein Regelungssystem für eine

### Parabolische partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}(\mathbf{x}) - \mathbf{k}(\nabla \mathbf{x})) + \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\xi, t), \quad t \in [0, T_f], \quad \text{(PDE)}$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3.$

Hier $\mathbf{v}(\xi, t) = \mathcal{B}(\xi)\mathbf{u}(t)$

- $\mathbf{u}$ Steuerung
- $\mathcal{B}$ Eingangsoperator

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## Parabolische PDE und abstrakte Cauchy-Probleme

Betrachten ein Regelungssystem für eine

### Parabolische partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}(\mathbf{x}) - \mathbf{k}(\nabla \mathbf{x})) + \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\xi, t), \quad t \in [0, T_f], \quad \text{(PDE)}$$

auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3.$

Ist (PDE) linear, dann führt eine Variationsformulierung auf ein Cauchy Problem für die

### lineare Evolutionsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}.$$

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Formulierung)

### lineare Evolutionsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}, \quad \text{(Cauchy)}$$

mit linearen Operatoren

$$\mathbf{A} : \mathrm{dom}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad \mathbf{B} : \mathcal{U} \to \mathcal{X},$$

und separablen Hilberträumen $\mathcal{X}$ (Zustandsraum), $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$ (d.h. $\mathcal{U}$ ist endlichdim.).

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Formulierung)

**lineare Evolutionsgleichung**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}, \quad \text{(Cauchy)}$$

**Ausgangsgleichung**

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad \text{(Ausgang)}$$

mit linearen Operatoren

$$\mathbf{A} : \mathrm{dom}(\mathbf{A}) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad \mathbf{B} : \mathcal{U} \to \mathcal{X}, \qquad \mathbf{C} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y},$$

und separablen Hilberträumen $\mathcal{X}$ (Zustandsraum), $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$ (d.h. $\mathcal{U}$ ist endlichdim.) und $\mathcal{Y}$ (Beobachtungsraum).

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Formulierung)

**lineare Evolutionsgleichung**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}, \quad \text{(Cauchy)}$$

**Ausgangsgleichung**

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \qquad \text{(Ausgang)}$$

Mit $\mathbf{Q} := \mathbf{C}^*\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$ und $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}}^* \geq 0$, sowie $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* > 0$ formulieren wir das

**Kostenfunktional**

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty < \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{y}, \mathbf{y} > + < \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} > dt \qquad \text{(Kosten)}$$

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Formulierung)

### lineare Evolutionsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}, \quad \text{(Cauchy)}$$

### Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad \text{(Ausgang)}$$

Mit $\mathbf{Q} := \mathbf{C}^*\hat{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$ und $\hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{Q}}^* \geq 0$, sowie $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* > 0$ formulieren wir das

### Kostenfunktional

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty < \mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x} > + < \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} > dt \qquad \text{(Kosten)}$$

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Formulierung)

### lineare Evolutionsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}, \quad \text{(Cauchy)}$$

### Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}. \quad \text{(Ausgang)}$$

### Kostenfunktional

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty < \mathbf{Q}\mathbf{x}, \mathbf{x} > + < \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} > dt \qquad \text{(Kosten)}$$

und damit das

### LQR–Problem

Minimiere (Kosten) unter der Nebenbedingung (Cauchy)

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Lösung)

In der Literatur gut verstanden:
Analog zu endlichen Dimensionen ist die

**optimale Zustandsrückführung**

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{X}_\infty\mathbf{x}.$$

Dabei ist $\mathbf{X}_\infty$ die minimale, positiv semidefinite, selbstadjungierte Lösung der

**Operator–Riccatigleichung**

$$0 = \mathcal{R}(\mathbf{X}) := \mathbf{Q} + \mathbf{A}^*\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{X}. \qquad \text{(O-ARE)}$$

z.B. [Lions '71; Lasiecka/Triggiani '00; Bensoussan et al. '92; Pritchard/Salamon '87]

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Lösung)

Damit läßt sich (Cauchy) schreiben als

### geschlossener Regelkreis

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{X}_\infty)\mathbf{x}$$

und die

### optimale Lösung

ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{x}_0,$$

dabei ist $\mathbf{S}(t)$ die durch $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{X}_\infty$ erzeugte Operatorhalbgruppe.

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

Sei $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Galerkinschema zu $\mathcal{X}$, darauf formulieren wir

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

Sei $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Galerkinschema zu $\mathcal{X}$, darauf formulieren wir

**n-d Evolutionsgleichung**

$$\dot{x} = A_n x + B_n \mathbf{u}, \qquad \mathcal{X}_n \ni x_n(0) = \mathbf{P}_n \mathbf{x}_0, \tag{n-d Cauchy}$$

**Ausgangsgleichung**

$$y_n = C_n x_n. \tag{n-d Ausgang}$$

mit linearen Operatoren

$$A_n : \mathrm{dom}(A_n) \subset \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_n, \qquad B_n : \mathcal{U} \to \mathcal{X}_n, \qquad C_n : \mathcal{X}_n \to \mathcal{Y}_n,$$

auf n-d Hilberträumen $\mathcal{X}_n$ (Zustandsraum) und $\mathcal{Y}_n$ (Beobachtungsraum), sowie weiterhin $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$.
$\mathbf{P}_n : \mathcal{X} \to \mathcal{X}_n$ die kanonische orthogonale Projektion.

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

Sei $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Galerkinschema zu $\mathcal{X}$, darauf formulieren wir

### n-d Evolutionsgleichung

$$\dot{x} = A_n x + B_n \mathbf{u}, \qquad \mathcal{X}_n \ni x_n(0) = \mathbf{P}_n \mathbf{x}_0,$$

(n-d Cauchy)

### Ausgangsgleichung

$$y_n = C_n x_n.$$

(n-d Ausgang)

Mit $Q_n := C_n^* \hat{Q}_n C_n$ und $\hat{Q}_n = \hat{Q}_n^* \geq 0$, sowie $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* > 0$ formulieren wir

### Kostenfunktional

$$\mathcal{J}_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty < \hat{Q}_n y_n, y_n > + < \mathbf{Ru}, \mathbf{u} > dt \qquad \text{(n-d Kosten)}$$

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

Sei $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Galerkinschema zu $\mathcal{X}$, darauf formulieren wir

### n-d Evolutionsgleichung

$$\dot{x} = A_n x + B_n \mathbf{u}, \qquad \mathcal{X}_n \ni x_n(0) = \mathbf{P}_n \mathbf{x}_0, \qquad \text{(n-d Cauchy)}$$

### Ausgangsgleichung

$$y_n = C_n x_n. \qquad \text{(n-d Ausgang)}$$

Mit $Q_n := C_n^* \hat{Q}_n C_n$ und $\hat{Q}_n = \hat{Q}_n^* \geq 0$, sowie $\mathbf{R} = \mathbf{R}^* > 0$ formulieren wir

### Kostenfunktional

$$\mathcal{J}_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty < Q_n x_n, x_n > + < \mathbf{Ru}, \mathbf{u} > dt \qquad \text{(n-d Kosten)}$$

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

### n-d Evolutionsgleichung

$$\dot{x} = A_n x + B_n \mathbf{u}, \qquad \mathcal{X}_n \ni x_n(0) = \mathbf{P}_n \mathbf{x}_0, \qquad \text{(n-d Cauchy)}$$

### Ausgangsgleichung

$$y_n = C_n x_n. \qquad \text{(n-d Ausgang)}$$

### Kostenfunktional

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty < Q_n x_n, x_n > + < \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} > dt \qquad \text{(n-d Kosten)}$$

### n-d LQR–Problem

Minimiere (n-d Kosten) unter der Nebenbedingung (n-d Cauchy)

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

Für diese gilt analog:

### Optimale Zustandsrückführung

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1} B_n^* X_n x_n,$$

wobei $X_n$ die minimale, positiv semidefinite, selbstadjungierte Lösung der

### n-d Operator–Riccatigleichung

$$0 = \mathcal{R}_n(X) := Q_n + A_n^* X + X A_n - X B_n \mathbf{R}^{-1} B_n^* X. \quad \text{(n-d O-ARE)}$$

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

Damit lässt sich (n-d Cauchy) ebenfalls schreiben als

**geschlossener Regelkreis**

$$\dot{x}_n = (A_n - B_n \mathbf{R}^{-1} B_n^* X_n) x_n$$

und die

**optimale Lösung**

ist gegeben durch

$$x_n(t) = S_n(t) \mathbf{P}_n \mathbf{x}_0,$$

wie oben ist $S_n(t)$ die durch $A_n - B_n \mathbf{R}^{-1} B_n^* X_n$ erzeugte Operatorhalbgruppe .

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

### Approximation

Die n-d LQR–Probleme approximieren das LQR–Problem derart, dass

- $X_n \mathbf{P}_n \mathbf{v} \to \mathbf{X}\mathbf{v}$ für $n \to \infty$ und alle $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$,
- $S_n(t)\mathbf{P}_n \mathbf{v} \to \mathbf{S}(t)\mathbf{v}$ für $n \to \infty$ und alle $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$,

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

### Approximation

Die n-d LQR–Probleme approximieren das LQR–Problem derart, dass

- $X_n \mathbf{P}_n \mathbf{v} \to \mathbf{X}\mathbf{v}$ für $n \to \infty$ und alle $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$,
- $S_n(t)\mathbf{P}_n \mathbf{v} \to \mathbf{S}(t)\mathbf{v}$ für $n \to \infty$ und alle $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$,

also in der starken Operator-Topologie.

[Banks/Kunisch'84] Verteilte Steuerung parabolischer PDEs

[Benner/S.'05] Randsteuerung mit gemischten Randbedingungen

[Lasiecka/Triggiani'00] Abschwächung der Bedingungen an (Cauchy), enthält Konvergenzraten

[Ito'87/'90; Morris'94] allgemeine Cauchy Probleme

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

### Approximation

Die n-d LQR–Probleme approximieren das LQR–Problem derart, dass

- $X_n \mathbf{P}_n \mathbf{v} \to \mathbf{X}\mathbf{v}$ für $n \to \infty$ und alle $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$,
- $S_n(t)\mathbf{P}_n \mathbf{v} \to \mathbf{S}(t)\mathbf{v}$ für $n \to \infty$ und alle $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$,

also in der starken Operator-Topologie.

Bemerkung:

- Für eine konkrete Basis (z.B. aus FDM/FEM Ansatzraum) besitzen alle n-d Operatoren Matrixrepräsentationen und $S(t)$ entspricht der Matrix-Exponentialfunktion $e^{(A-BR^{-1}B^TX)t}$.

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Approximation)

### Approximation

Die n-d LQR–Probleme approximieren das LQR–Problem derart, dass

- $X_n \mathbf{P}_n \mathbf{v} \to \mathbf{X}\mathbf{v}$ für $n \to \infty$ und alle $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$,
- $S_n(t)\mathbf{P}_n \mathbf{v} \to \mathbf{S}(t)\mathbf{v}$ für $n \to \infty$ und alle $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$,

also in der starken Operator-Topologie.

Bemerkung:

- Für eine konkrete Basis (z.B. aus FDM/FEM Ansatzraum) besitzen alle n-d Operatoren Matrixrepräsentationen und $S(t)$ entspricht der Matrix-Exponentialfunktion $e^{(A-BR^{-1}B^TX)t}$.
- **u** und **R** bleiben stets erhalten. D.h. **u** aus der Rechnung für ein n-d Problem kann direkt im $\infty$-d Problem angewandt werden.

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Numerik)

### Hauptaufgabe der Numerik

Löse die große dünnbesetzte Matrix–Riccatigleichung

$$0 = \mathcal{R}_h(X) := Q_h + A_h^* X + X A_h - X B_h \mathbf{R}^{-1} B_h^* X. \qquad \text{(M-ARE)}$$

effizient in Bezug auf CPU– und Speichernutzung.

Klassische Methoden sind wegen ihres kubischen Aufwands nicht anwendbar.

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Numerik)

(M-ARE) ist nichtlinear $\Rightarrow$

### Newtonverfahren für ARE

$$\mathcal{R}'_h|_X(N_\ell) = -\mathcal{R}_h(X_\ell), \qquad X_{\ell+1} = X_\ell + N_\ell.$$

Die Frechét Ableitung von $\mathcal{R}_h$ an der Stelle $X$ ist gegeben durch den Lyapunov Operator

$$\mathcal{R}'_h|_X : \quad Z \mapsto (A_h - B_h R^{-1} B_h^T X)^T Z + Z(A_h - B_h R^{-1} B_h^T X).$$

Damit ergibt sich die

### Einschritt–Newtoniteration

$$(A_h - B_h R^{-1} B_h^T X_\ell)^T X_{\ell+1} + X_{\ell+1}(A_h - B_h R^{-1} B_h^T X_\ell) = -C_h^T Q_h C_h - X_\ell B_h R^{-1} B_h^T X_\ell$$

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Numerik)

In jedem Newtonschritt lösen wir eine

### Lyapunov Gleichung

$$F^T X + XF = -GG^T. \qquad \text{(Lyapunov)}$$

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Numerik)

In jedem Newtonschritt lösen wir eine

### Lyapunov Gleichung

$$F^T X + XF = -GG^T. \qquad \text{(Lyapunov)}$$

Verfügbare Löser für große dünnbesetzte Gleichungen (Lyapunov)

ADI [Wachspress'88; Penzl'99; Benner/Li/Penzl'00; Li/White'02];

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Numerik)

In jedem Newtonschritt lösen wir eine

**Lyapunov Gleichung**

$$F^T X + XF = -GG^T. \tag{Lyapunov}$$

Verfügbare Löser für große dünnbesetzte Gleichungen (Lyapunov)

- **ADI** [Wachspress'88; Penzl'99; Benner/Li/Penzl'00; Li/White'02];
- **Krylov** [Kasenally/Jaimoukha'94; Jbilou/Riquet'06; Simoncini'06]

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Numerik)

In jedem Newtonschritt lösen wir eine

**Lyapunov Gleichung**

$$F^T X + XF = -GG^T. \qquad \text{(Lyapunov)}$$

Verfügbare Löser für große dünnbesetzte Gleichungen (Lyapunov)

- **ADI** [Wachspress‘88; Penzl‘99; Benner/Li/Penzl‘00; Li/White‘02];
- **Krylov** [Kasenally/Jaimoukha‘94; Jbilou/Riquet‘06; Simoncini‘06]
- **Smith** [Penzl‘99; Gugercin/Sorensen/Antoulas‘03]

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Numerik)

In jedem Newtonschritt lösen wir eine

### Lyapunov Gleichung

$$F^T X + XF = -GG^T. \tag{Lyapunov}$$

Verfügbare Löser für große dünnbesetzte Gleichungen (Lyapunov)

- ADI [Wachspress‘88; Penzl‘99; Benner/Li/Penzl‘00; Li/White‘02];
- Krylov [Kasenally/Jaimoukha‘94; Jbilou/Riquet‘06; Simoncini‘06]
- Smith [Penzl‘99; Gugercin/Sorensen/Antoulas‘03]
- ... viele weitere

Alle arbeiten auf Niedrigrangfaktoren $Z$ der Lösung $X$ um Speicherbedarf und Rechenaufwand zu verringern.

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Numerik)

In jedem Newtonschritt lösen wir eine

**Lyapunov Gleichung**

$$F^T X + XF = -GG^T. \qquad \text{(Lyapunov)}$$

Verfügbare Löser für große dünnbesetzte Gleichungen (Lyapunov)

- **ADI** [Wachspress'88; Penzl'99; Benner/Li/Penzl'00; Li/White'02];
- **Krylov** [Kasenally/Jaimoukha'94; Jbilou/Riquet'06; Simoncini'06]
- **Smith** [Penzl'99; Gugercin/Sorensen/Antoulas'03]
- **...** viele weitere

ADI benötigt Shift–Parameter; Parameterwahl:
[Ellner/Wachspress'91; Penzl'00; Benner/Mena/S.'06; Sabino'06]

# Regelung/Steuerung linearer parabolischer PDEs

## LQR Design für abstrakte Cauchy Probleme (Numerik)

In jedem Newtonschritt lösen wir eine

### Lyapunov Gleichung

$$F^T X + XF = -GG^T. \qquad \text{(Lyapunov)}$$

Verfügbare Löser für große dünnbesetzte Gleichungen (Lyapunov)

- ADI [Wachspress'88; Penzl'99; Benner/Li/Penzl'00; Li/White'02];
- Krylov [Kasenally/Jaimoukha'94; Jbilou/Riquet'06; Simoncini'06]
- Smith [Penzl'99; Gugercin/Sorensen/Antoulas'03]
- … viele weitere

Bei Systemen mit sehr wenigen Eingängen können Newton-ADI und Newton-Smith direkt auf dem Feedback $K_h := \mathbf{R}^{-1} B_h^T X$ iterieren [Penzl'00;Banks/Ito'91].

# Folgeregelung

## Linear Syteme mit Inhomogenitäten

Erinnerung zu Systemen für

**lineare Evolutionsgleichungen mit Inhomogenitäten**

$$\dot{x} = Ax + Bu + f$$

Sei nun $\hat{x}$ Lösung des ungesteuerten Systems $\dot{x} = Ax + f$, dann

$$f = \dot{\hat{x}} - A\hat{x}$$

und

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = A(x - \hat{x}) + Bu.$$

Wir können also auch für $z = x - \hat{x}$ das System

$$\dot{z} = Az + Bu$$

lösen um die Steuerung $u$ zu berechnen.

z.B. [Godunov'97]

# Folgeregelung

## Anwendung auf Folgeregelung von parabolischen PDEs

Betrachten einen anzusteuernden stationären Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ und das

**Folgeregelungs–Problem**

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty < \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} > + < \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} > dt \qquad \text{(Tracking)}$$

Definieren $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ und damit das Cauchy Problem

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{v} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{z} \tag{1}$$

die optimale Steuerung ist dann wie oben gegeben als $\mathbf{v} = -\mathbf{K}\mathbf{z}$ und (1) ist äquivalent zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} + \dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$$

# Folgeregelung

## Anwendung auf Folgeregelung von parabolischen PDEs

Betrachten einen anzusteuernden stationären Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ und das

### Folgeregelungs–Problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$$
$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty < \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} > + < \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} > dt \qquad \text{(Tracking)}$$

- $\mathbf{f} := \dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}$ ist eine bekannte Inhomogenität beim Lösen des geschlossenen Regelkreises.
- Gleichungen (Tracking) und (1) benötigen dieselbe algebraische Riccatigleichung.

# Folgeregelung

## Anwendung auf Folgeregelung von parabolischen PDEs

Betrachten einen anzusteuernden stationären Zustand $\tilde{\mathbf{x}}$ und das

### Folgeregelungs–Problem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \qquad \mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$$
$$\mathcal{J}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_0^\infty < \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}), \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} > + < \mathbf{R}\mathbf{u}, \mathbf{u} > dt \qquad \text{(Tracking)}$$

- Können das Feedback für (Tracking) mit obigen Methoden für (1) berechnen und dann mit der Inhomogenität den geschlossenen Regelkreis lösen.
- Vorgehen funktioniert auch für Referenzpaare $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}})$ [Benner/Görner/S.'06]

# Nichtlineare Probleme
## Wärmeleitung in Stahlprofilen, ein Modellproblem

Die Abkühlung von Stahlprofilen im Walzwerk dient als Modellproblem. Wir betrachten die nichtlineare Wärmeleitung

$$
\begin{aligned}
c(x)\rho(x)\tfrac{\partial}{\partial t}x(\xi,t) &= \nabla.(\lambda(x)\nabla x(\xi,t)) && \text{in } \Omega\times(0,T),\\
-\lambda(x)\tfrac{\partial}{\partial \nu}x(\xi,t) &= \kappa_i(x(\xi,t)-u_i(t)) && \text{auf } \Gamma_i\times(0,T),\\
x(\xi,0) &= x_0(\xi) && \text{in } \Omega,
\end{aligned}
\tag{Heat}
$$

- $x$ Zustand, Temperatur
- $u$ Steuerung/Regelung
- $T \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ Endzeitpunkt
- $c(x)$ spezifische Wärmekapazität
- $\varrho(x)$ Dichte
- $\lambda(x)$ Wärmeleitfähigkeit

# Nichtlineare Probleme

## Wärmeleitung in Stahlprofilen, ein Modellproblem

Die Abkühlung von Stahlprofilen im Walzwerk dient als Modellproblem. Wir betrachten die nichtlineare Wärmeleitung

$$\begin{aligned}
c(x)\rho(x)\tfrac{\partial}{\partial t}x(\xi,t) &= \nabla.(\lambda(x)\nabla x(\xi,t)) && \text{in } \Omega\times(0,T),\\
-\lambda(x)\tfrac{\partial}{\partial \nu}x(\xi,t) &= \kappa_i(x(\xi,t)-u_i(t)) && \text{auf } \Gamma_i\times(0,T),\\
x(\xi,0) &= x_0(\xi) && \text{in } \Omega,
\end{aligned} \tag{Heat}$$

(Heat) ist offenbar nichtlinear da $c$, $\varrho$ und $\lambda$ von der Temperatur $x$ abhängen.

**Idee**

Friere die Materialparameter für einen oder mehrere Zeitschritte ein. $\Rightarrow$ Linearisierung $\Rightarrow$ Verfahren aus der Einleitung greift.

# Nichtlineare Probleme
## Linearisierung und Ergebnisse

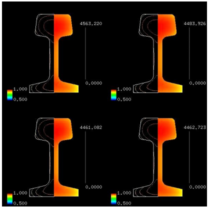
**Idee**

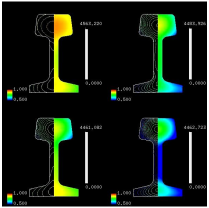
Friere die Materialparameter für einen Zeitschritt ein. $\Rightarrow$ Linearisierung $\Rightarrow$ Verfahren aus der Einleitung greift.

**Numerik** semi-implizite Diskretisierung

**Theorie** Einbettung in modellprädiktive Steuerungsschemata.

**Testrechnungen** Ergebnisse vielversprechend





## Ende

# Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!

- FEM: ALBERTA
- Grafiken: Grape/MATLAB
- AREs: LYAPACK