

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) Bemerkungen zum QR Algorithmus

- a) 2×2 Blöcke mit reellen Eigenwerten können durch single-shift-QR-Schritte in Schurform gebracht werden
- b) Soll nur das Spektrum $\Lambda(A)$ ausgerechnet werden, so müssen wir Q nicht mitführen (rote und blaue Teile auf dem Merkblatt entfallen). Man erhält dann aber *nicht* die Schurform von A in H
- c) Statistische Auswertungen zeigen: Pro Eigenwert sind ca. 2 QR Schritte nötig \Rightarrow Kosten $\approx 10n^3$ falls nur Eigenwerte ausgerechnet werden. Für Eigenwerte + Schurzerlegung $\approx 25n^3$
- d) In endlicher Arithmetik mit Maschinengenauigkeit \mathbf{u} gilt:

Schurform \tilde{H} : $\tilde{H} = Q^T(A + E)Q$ mit $\|E\|_2 \equiv \mathbf{u}$

Schurvektor-Matrix \tilde{Q} : $Q^T Q = I + F$ mit $\|F\|_2 \equiv \mathbf{u}$

\Rightarrow Der QR Algorithmus nach Francis ist numerisch rückwärtsstabil.

- e) Stagnation des Francis QR-Algorithmus ist möglich; meist hilft hier ein Zufalls-Shift, d.h. ein single-Shift-QR-Schritt mit $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig.
- f) Aus der berechneten Schurform können beliebige A -invariante Unterräume und Eigenvektoren durch Umordnung der Eigenwerte auf der Diagonale der Schurform berechnet werden. (Siehe dazu Hausaufgabe 5 Aufgabe 1)