Bestimmung von Eigenwerten über Matrix-Zerlegungen

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ beliebig. Es existieren folgende Zerlegungen:

1. Jordan-Normalform $X^{-1}AX = \mathrm{diag}(J_1, \dots, J_k)$

mit Jordanblock :

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

hier: X regulär, Eigenwerte bleiben erhalten, aber: **Fehlerverstärkung**, numerische Berechnung instabil

A diagonalisierbar
Falls $\rho(\lambda_i) = \sigma(\lambda_i)$ (geometr. Vfh. = alg. Vfh.) für alle $\lambda \in \Lambda(A)$ gilt:

$$X^{-1}AX = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

2. Schur-Zerlegung $Q^*AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + N$

mit

$$N = \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

hier: Q unitär, Eigenwerte und Längen/Winkel bleiben erhalten, keine Fehlerverstärkung

A unitär diagonalisierbar
Falls A normal ($AA^* = A^*A$) gilt:

$$Q^*AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

(3. reelle Schur-Zerlegung) für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal:

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_{mm} \end{bmatrix}$$

mit $R_{ii} = \lambda \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ oder $R_{ii} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\Lambda(R_{ii}) = \{\lambda, \overline{\lambda}\}, \quad \lambda, \overline{\lambda} \in \Lambda(A)$
numerische Berechnung mit QR-Algorithmus