Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Wintersemester 2007/2008
Dipl. Math. Jens Saak
Dipl. Math. Ulrike Baur

# Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 2. Hausaufgabe

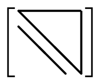
**Abgabetermin: 21.12.2007**
(in der Vorlesung)

## Theoretische Aufgaben

### Aufgabe 1 (4 Punkte) (Berechnung der Hessenberg-Form)

Für alle $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ existiert eine orthogonale Matrix, so daß

$$Q^T AQ \;=\; H \;=$$



, (1)

d.h., $H$ ist obere Hessenbergmatrix. Gib einen Algorithmus an, der die Hessenberg-Form wie in (1) berechnet und bestimme dessen Aufwand.
Sei nun $A$ eine Matrix, die bereits bis auf den Eintrag $a_{31}$ in oberer Hessenberg-Form ist. Gib einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Hessenberg-Form an und vergleiche den Aufwand mit dem Algorithmus zur Berechnung von (1).

### Aufgabe 2 (4 Punkte) (Spectral Mapping Theorem)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion, wobei $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset D$ und $D$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ sei.
Zeige, daß $\Lambda(f(A)) = \{f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\}$.

### Aufgabe 3 (4 Punkte) (Signumfunktions-Methode)

a) Sei $\mu_0 \in \mathbb{C}$ mit $Re(\mu_0) \neq 0$. Zeige, daß die Iteration

$$\mu_{k+1} = \frac{1}{2}\left(\mu_k + \frac{1}{\mu_k}\right) =: f(\mu_k) \tag{2}$$

quadratisch konvergiert mit $\lim_{k\to\infty} \mu_k = \operatorname{sign} Re(\mu_0)$.

b) Die Signum-Funktion $\operatorname{sign} A$ einer diagonalisierbaren Matrix $A$ mit $\Lambda(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ und

$$A = S \begin{bmatrix} D_+ & 0 \\ 0 & D_- \end{bmatrix} S^{-1}, \qquad D_+ \in \mathbb{R}^{k\times k}, D_- \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)},$$

wobei $\Lambda(D_\pm) = \Lambda(A) \cap \mathbb{C}^\pm$, ist definiert durch

$$\operatorname{sign} A := S \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Zeige, daß die Iteration $A_{k+1} = f(A_k)$, $A_0 = A$, mit $f$ wie in (2), quadratisch gegen $\operatorname{sign} A$ konvergiert.

c) Zeige, daß durch $P_\pm := \frac{1}{2}(I_n \pm \operatorname{sign} A)$ Spektralprojektoren auf die $A$-invarianten Unterräume $\mathcal{S}_\pm$ zu $\Lambda(A) \cap \mathbb{C}^\pm$ definiert werden, d.h. $P = P^2$ und $\operatorname{range} P_\pm = \mathcal{S}_\pm$.

d) Gib einen Algorithmus zur Berechnung der $A$-invarianten Unterräume $\mathcal{S}_\pm$ mit Hilfe der Signumfunktion von $A$ an.

### Aufgabe 4 (4 Punkte) (Beweis zu Satz II.9 der Vorlesung)

Sei $Q^*AQ = D + N$ eine Schur-Zerlegung von $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, d.h.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & \ddots \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad \Lambda(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

sowie $Q \in \mathbb{C}^{n,n}$ unitär. Dann gilt für $\mu \in \Lambda(A+E)$:

$$\min_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda - \mu| \leq \max\left\{\Theta, \Theta^{\frac{1}{p}}\right\},$$

wobei

$$\Theta = \|E\|_2 \sum_{k=0}^{p-1} \|N\|_2^k$$

und $p =$ Nilpotenzindex von $|N|$, d.h. $p = \min\{q \in \mathbb{N}_0 \mid |N|^q = 0\}$ mit $|N| = [|n_{ij}|]_{i,j=1}^n$.
**Hinweis:** Vergleiche Beweis von Bauer-Fike; benötigt Neumannsche Reihe.

## Programmieraufgaben

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Schreibe ein MATLAB-Programm, welches mit Hilfe der Signumfunktions-Methode aus Aufgabe 3 die Block-Dreiecksform

$$T = Q^T A Q = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} \tag{3}$$

berechnet, wobei $\Lambda(T_{11}) \subset \mathbb{C}^-$, $\Lambda(T_{22}) \subset \mathbb{C}^+$.
(**Hinweis:** Erzeugt man sich `A=rand(n)`, oder `A=randn(n)`, so sind in der Regel die Voraussetzungen für die Anwendung der Signumfunktion erfüllt).