Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Wintersemester 2007/2008
Dipl. Math. Jens Saak
Dipl. Math. Ulrike Baur

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 4. Hausaufgabe

Abgabetermin: 18.01.2008
(in der Vorlesung)

Aufgabe 1 (4 Punkte) (Beweis zu Lemma II.18 der Vorlesung)

Sei $\mu \in \Lambda(H)$, H unreduzierte Hessenberg-Matrix (d.h. $h_{j+1,j} \neq 0$, $j = 1, \ldots, n-1$) und $H - \mu I = QR$ eine QR-Zerlegung.
a) Zeigen Sie, dass dann für $\tilde{H} := RQ + \mu I$ gilt: $\tilde{h}_{n,n-1} = 0$, $\tilde{h}_{n,n} = \mu$.
Zusatz: Was passiert falls nicht μ, aber $\mu + e$ für $\|e\| < \varepsilon$ Eigenwert ist?
b) Was bedeutet das für die geshiftete Iteration

$$\begin{aligned} H_{k-1} - \mu I &=: Q_k R_k, \\ H_k &:= R_k Q_k + \mu I \text{ ?} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) (Hessenberg-Reduktion und Krylov-Matrizen)

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $Q^T A Q = H$ eine unreduzierte Hessenberg-Matrix genau dann wenn $Q^T K(A, Q(:,1), n) = R$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix ist.
Hinweis: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ ist die Krylov-Matrix $K(A, v, j) \in \mathbb{R}^{n \times j}$ definiert durch

$$K(A, v, j) := [v, Av, \ldots, A^{j-1}v].$$

Zusatz: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zusätzlich symmetrisch. Zeigen Sie, wenn R singulär ist und $k = \underset{j=1,\ldots,n}{\operatorname{argmin}} \{r_{jj} = 0\}$ dann gilt auch $k = \underset{j=1,\ldots,n-1}{\operatorname{argmin}} \{h_{j,j-1} = 0\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) (Frobenius-Norm)

Beweisen Sie, dass die Frobenius-Norm für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invariant unter orthogonaler Ähnlichkeitstransformation ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte) (Inverse Iteration)

Seien $\mu = \tilde{\lambda}$ eine berechnete Approximation zu $\lambda \in \Lambda(A)$ sowie $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ mit $\|q^{(0)}\| = 1$. Die *inverse Iteration* ergibt sich als Anwendung der Potenziteration auf $(A - \mu I)^{-1}$ und $q^{(0)}$.
Erklären Sie, warum die inverse Iteration sehr schnell konvergiert, falls die Startnäherung an den Eigenwert gut ist.
Hinweis: Vergleichen Sie dazu auch den Beweis zur Potenziteration.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)** **(Rayleigh-Quotienten-Iteration)**

Seien $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Der Skalar $r(x) := \frac{x^T Ax}{x^T x}$ heißt der *Rayleigh-Quotient* zu x bzgl. A.

a) Zeigen Sie, dass $r(x)$ den Ausdruck $\|(A - \lambda I)x\|_2$ minimiert.

Zusatz: Wann entspricht $r(x)$ einem Eigenwert von A?

b) Programmieren Sie die Potenziteration, die inverse Iteration und die Rayleigh-Quotienten-Iteration und vergleichen sie diese anhand der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \end{bmatrix}, \quad B = \texttt{wilkinson}(n),$$

für verschiedene n (z.B. n=20,50,500).

Die Rayleigh-Quotienten-Iteration geht dabei aus der inversen Iteration durch Ersetzung des konstanten Shifts mit dem Rayleigh-Quotienten zur jeweils letzten Eigenvektoriterierten hervor.