Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Wintersemester 2007/2008
Dipl. Math. Jens Saak
Dipl. Math. Ulrike Baur

Numerische Lineare Algebra (Eigenwertprobleme) – 5. Hausaufgabe

Abgabetermin: 25.01.2008
(in der Vorlesung)

Aufgabe 1 (5 Punkte) (Unterräume und Schur-Form)

a) Geben Sie eine Givens-Rotation $G(\theta) \in \mathbb{R}^2$ an mit

$$G(\theta)^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & t_{12} \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} G(\theta) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \tilde{t}_{12} \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Wie kann man mit Hilfe solcher Givens-Rotationen für eine Matrix A in Schur-Form mit $\Lambda(A) \subset \mathbb{R}$ einen invarianten Unterraum zu einer vorgegebenen Teilmenge von Eigenwerten von A bestimmen?

b) Geben Sie einen Algorithmus zur direkten Berechnung eines Eigenvektors zu einem beliebigen reellen Eigenwert einer Matrix A in Schur-Form an, **ohne** Eigenwerte auf der Diagonale der Schur-Form zu vertauschen.

Aufgabe 2 (5 Punkte) (Tridiagonale Matrizen)

Sei $T = T^T \in \mathbb{R}^{n,n}$ tridiagonal und $\lambda \in \Lambda(T)$ mit algebraischer Vielfachheit k.
Zeigen Sie, daß mindestens $k-1$ Nebendiagonalelemente von T null sein müssen. Was bedeutet das für den symmetrischen QR Algorithmus?

Aufgabe 3 (5 Punkte) (Jacobi-Verfahren für SEP)

Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$. Implementieren Sie das klassische und zyklische Jacobi-Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte von A.
Vergleichen Sie die beiden Implementierungen hinsichtlich der Konvergenz- und Ausführungsgeschwindigkeit für zufällig erzeugte Matrizen. Plotten Sie dazu den Verlauf von $\mathrm{off}(A^{(\ell)}) := \|A\|_F - \sum_{j=1}^{n} a_{jj}^2$ während der Iteration. (Dazu überlege man sich, wie $\mathrm{off}(A^{(\ell)})$ in jedem Schritt effizient berechnet werden kann!)

Aufgabe 4 **(5 Punkte)** **(Berechnung der SVD)**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$.

a) Geben Sie einen Jacobi-artigen Algorithmus zur Berechnung der SVD von A an. Dabei sollen in jedem Schritt SVDs der Größe 2×2 gelöst werden.

b) Welche Zusammenhänge bestehen zwischen der SVD von A und den Eigenwertzerlegungen der Matrizen

   (i) $A^T A$,

   (ii) AA^T,

   (iii) $\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$?

c) Betrachten Sie die Matrix $A^T A$ aus b)(i). Man überlege sich einen einseitigen Jacobi-Algorithmus zur Berechnung der SVD von A. Dabei soll $A^T A$ niemals explizit ausgerechnet werden. In jedem Iterationsschritt wird nur die zur Bestimmung der Jacobi-Rotation benötigte Teilmatrix von ${A^{(\ell)}}^T A^{(\ell)}$ aufgestellt und die Jacobi-Rotation wird dann von rechts auf $A^{(\ell)}$ angewendet (daher der Name "einseitiger Jacobi-Algorithmus").