Operatornorm

Wir bezeichnen mit $||\cdot||_\Delta$ sowohl eine Norm auf dem Urbildraum $\mathbb{R}^m$ als auch die entsprechende Norm auf dem Bildraum $\mathbb{R}^n$.

- Induzierte Matrixnorm (Operatornorm, Vektor verträgliche Matrixnorm) für $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$:

$$||A||_\Delta := \sup_{x\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}} \frac{||Ax||_\Delta}{||x||_\Delta}$$

- Äquivalent dazu:

$$||A||_\Delta := \sup_{x\in\mathbb{R}^m,\, \|x\|_\Delta=1} ||Ax||_\Delta$$

- Für eine Operatornorm gilt stets:

$$||Ax||_\Delta \leq ||A||_\Delta ||x||_\Delta$$

sowie:

$$||I||_\Delta := \sup_{x\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}} \frac{||x||_\Delta}{||x||_\Delta} = 1$$

Bekannte Matrixnormen für $A \in \mathbb{R}^{n,m}$

- Spaltensummennorm (aus Summennorm):

$$||x||_1 = \sum_i |x_i| \quad \rightarrow \quad ||A||_1 = \max_{j=1,\ldots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

- Zeilensummennorm (aus Maximumnorm):

$$||x||_\infty = \max_i |x_i| \quad \rightarrow \quad ||A||_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}|$$

- Spektralnorm (aus Euklidscher Norm):

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} \quad \rightarrow \quad ||A||_2 = \rho(A^*A)^{1/2}$$

Frobeniusnorm

- Definition:

$$||A||_F := \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2\right)^{1/2} = \text{trace}(A^*A)^{1/2}.$$

- Wird durch keine Vektornorm induziert, denn:

$$||I||_F = \sqrt{n}.$$