Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 1. Hausaufgabe

Abgabetermin: 15./16.4.2009
(in der jeweiligen Übungsgruppe)

Theoretische Aufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte) (mehrdimensionales Differenzieren)

a) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{\|x\|}$.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$F(r, \phi, \theta) = \begin{bmatrix} r\sin(\theta\cos(\phi)) \\ r\sin(\theta\sin(\phi)) \end{bmatrix}.$$

c) Ermitteln sie den Gradienten der quadratischen Form: $q(x) = x^T Ax + b^T x + c$ für $A = A^T \in \mathbb{R}^{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (2 Punkte) (Taylorentwicklung)

Bestimmen sie die Taylorentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_N(x)$$

für $f(x) = \sin(x)$ mit Entwicklungspunkt $a = \frac{\pi}{3}$ und $N = 5$. (Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$)

Aufgabe 3 (3 Punkte) (QR Zerlegung)

a) Berechnen Sie die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass die dünne QR-Zerlegung $A = Q_1 R_1$ eindeutig ist, falls $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $(m > n)$ vollen Spaltenrang hat. $Q_1 \in \mathbb{R}^{m,n}$ hat dabei orthonormale Spalten und $R_1 \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist obere Dreiecksmatrix. Desweiteren geht R_1 aus dem unteren Dreiecksfaktor G der Cholesky-Faktorisierung von $A^T A$ durch die Identität $R_1 = G^T$ hervor.

Programmieraufgaben

> Abgabe der Lösung aller Programmieraufgaben in Papierform. Alle selbst erstellten M-Files sind ausgedruckt einzureichen, sowie per Email an `kupa@hrz.tu-chemitz.de` einzuschicken. Erfüllen der Aufgaben mit Matlab ist durch eine Mitschrift der Session (Funktion `diary`) zu belegen. Die für einzelne Aufgaben relevanten Stellen in der Mitschrift sind durch die Aufgabennummer kenntlich zu machen. (Nicht relevante Teile sollten möglichst entfernt werden.)
> Als Betreff für die zugesandten Emails ist jeweils `HAn-Numerik-Übungsgruppe-Name1_Name2`
> (Beispiel: HAn-Numerik-Saak-Mustermann_Musterfrau)
> oder `HAn-Numerik-Übungsgruppe-Hausaufgabengruppenname`
> (Beispiel: HAn-Numerik-Bernauer-Die_Epsilons) zu verwenden.

Aufgabe 1 (3 Punkte) (Matlab Funktionsgraphen)

a) Stellen Sie mittels des `plot` Befehls in MATLAB die Graphen zu $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für $x \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ dar.

b) Plotten sie die Exponentialfunktion auf dem Intervall $[0, 20] \subset \mathbb{R}$ einmal via `plot` und einmal semilogarithmisch in vertikaler Richtung. Stellen Sie beide Ausgaben in einem Fenster untereinander dar.

Fügen Sie in beiden Teilaufgaben Achsenbeschriftungen, einen Titel und in a) außerdem eine Legende ein.

Aufgabe 2 (3 Punkte) (Eigene Funktionen in MATLAB)

a) Schreiben Sie eine MATLABfunktion `summen`, die einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ als Eingangsparameter besitzt und die folgenden Ausdrücke berechnet:

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$
$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{n-i+1},$$
$$S_* = (x_1 + x_n) - x_n.$$

Sehen Sie S_0, S_1 und S_* als Rückgabewerte vor. Versehen Sie die Funktion mit einem Hilfetext, der die Funktionsweise und Parameter der Funktion erläutert und mit `help summen` aufgerufen werden kann.

b) Testen Sie die Funktion anhand des Vektors `x=logspace(-10,10,1000)` und lassen Sie sich die Ergebnisse im `longe` Format ausgeben. Was beobachten Sie?