Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009

Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 14. Hausaufgabe

Abgabetermin: 15./16.7.2009
(in der jeweiligen Übungsgruppe)

Theoretische Aufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte) (Gauß-Quadratur)

a) Zeigen Sie, dass die Mittelpunktsregel $Q = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ Polynome bis Grad 1 exakt integriert, also dass eine Gauß-Quadratur damit erreicht wird.

b) Bestimmen Sie $\alpha_1, \alpha_2, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so, dass

$$Q := \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

eine Gauß-Quadratur-Formel (mit $n = 2$ Stützstellen) für das Intervall $[0, 1]$ ergibt.

Hinweis: Falls Sie auf ein nichtlineares Gleichungssystem in $\alpha_1, \alpha_2, x_1, x_2$ kommen, so können Sie zur Vereinfachung $\alpha_1 = \alpha_2$ annehmen, müssen dann jedoch zeigen, dass von der Lösung tatsächlich alle ursprünglichen Bedingungen erfüllt werden.

Aufgabe 2 (4 Punkte) (Lobatto-Quadratur)

Lobatto-Quadratur-Formeln können mit $n\,(n \geq 2)$ Stützstellen Polynome vom Grad $m = 2n - 3$ exakt integrieren. Der wesentliche Unterschied zur Gauß-Quadratur ist, dass die Intervallgrenzen als fixe Stützstellen verwendet werden:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \lambda_1\, f(-1) + \lambda_n\, f(1) + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i\, f(\xi_i).$$

a) Leiten Sie die entsprechenden Quadraturformeln für $m = 1, 3, 5$ her. (Sie dürfen hierzu auch ein Computer-Algebra-Paket ihrer Wahl benutzen. Die Herleitung der Gewichte und Stützstellen muss aber nachvollziehbar sein!)

b) Welche bekannten Formeln ergeben sich im Fall $m = 1$ und im Fall $m = 3$?

c) Welche Eigenschaft haben die Stützstellen bzw. die Gewichte?

d) Wie sieht das (nichtlineare) Gleichungssystem zur Bestimmung der Gewichte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und der Stützstellen $\xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ in Abhängigkeit von m (bzw. n) aus?

Aufgabe 3 **(2 Punkte)** **(Gewichte bei beliebig vorgegebenen Stützstellen)**

Zeigen Sie, dass für jede Unterteilung

$$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$$

des Intervalls $[a, b]$ eindeutig bestimmte Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \, \mathcal{P}(x_k) = \int_a^b \mathcal{P}(x)\, dx \qquad \text{für alle } \mathcal{P} \in \Pi_n.$$

Programmieraufgaben

Aufgabe 1 **(4 Punkte)** **(Vergleich von numerischen Integrationsverfahren)**

a) Integrieren Sie $I := \int\limits_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ exakt.

b) Implementieren Sie
   1. die zusammengesetzte Mittelpunktregel (n Knoten, $h = 1/n$), $Q_M(n)$,
   2. die zusammengesetzte Trapezregel ($n + 1$ Knoten, $h = 1/n$), $Q_T(n)$ und
   3. die zusammengesetzte Simpsonregel ($n + 1$ Knoten, $h = 2/n$), $Q_S(n)$ und
   4. die zusammengesetzte Gauß-Regel aus Aufgabe 1b) (n Knoten, $h = 2/n$, $Q_G(n)$, n muss gerade sein)

   zur Bestimmung von I. Achten Sie dabei insbesondere darauf, dass wirklich nur jeweils n bzw. $n + 1$ Funktionsauswertungen erfolgen.

c) Geben Sie den Fehler $I - Q(n)$ in einer Tabelle für $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256$ an:

n	$I - Q_M(n)$	$I - Q_T(n)$	$I - Q_S(n)$	$I - Q_G(n)$
2				
$\vdots$				
256				

d) Schätzen Sie mit den ermittelten Fehlern die Konvergenzordnungen p und q gemäß

$$|I - Q(n)| \approx c_1 h^p, \qquad \text{bzw.} \qquad |I - Q(n)| \approx c_2 n^{-q}.$$

   Geben Sie diese in Tabellen analog zu obiger an.
   Hinweis: Nutzen Sie aus, dass $h_{i+1} = \frac{h_i}{2}$ bzw. $n_{i+1} = 2n_i$.

Aufgabe 2 **(3 Punkte)** **(Romberg-Verfahren)**

Implementieren Sie das Romberg-Verfahren zur numerischen Bestimmung von

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

mittels Extrapolation auf Basis der summierten Trapezregel. Verwenden Sie für die Wahl der Schrittweitenfolge die sogenannte Romberg-Folge

$$h_0 = b - a, \quad h_{i+1} = \frac{h_i}{2}.$$

Testen Sie ihr Verfahren mit den folgenden Beispielen:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx, \quad \int_0^4 x^5\,dx, \quad \int_0^\pi \sin(x)\,dx, \quad \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

Zeichnen Sie für jedes dieser Beispiele den absoluten Fehler des Extrapolationsverfahrens im Vergleich mit dem absoluten Fehler der summierten Trapezregel.

Hinweis: Sie können anstatt des Neville-Aitken-Schemas auch das Newton-Schema aus Hausaufgabe 12 verwenden.