Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 5. Hausaufgabe

Abgabetermin: 13./14.5.2009
(in der jeweiligen Übungsgruppe)

Theoretische Aufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte) (Neumannsche Reihe)

Sei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ eine submultiplikative Matrixnorm, und für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelte: $\|A\| < 1$.

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

b) Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichung nach:

$$\|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) (Determinantenberechnung)

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sowie jeweils $A_{ik} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix , die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und k-ten Spalte hervorgeht. Dann lässt sich die Determinante von A nach der wohlbekannten Formel:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik})$$

entwickeln. Geben sie den Rechenaufwand in Anzahl Gleitkommaoperationen (flop) für die Berechnung der Determinante nach dieser Vorschrift an (Tipp: Es reicht für das Nachfolgende hier eine Rekursionsformel zu finden.). Schätzen Sie die benötigte Zeit für die Berechnung der Determinante einer 100×100 Matrix auf einem 3GHz Prozessor. Nehmen sie dazu an, dass dieser Prozessor etwa 3Gflops, also $3 \cdot 10^9$ (oder informationstechnisch genauer $3 \cdot 1024^3$) Gleitkommaoperationen pro Sekunde, bewältigt.

b) Zeigen Sie, dass die Determinante auch mittels der LR-Zerlegung berechnet werden kann und vergleichen Sie den Aufwand mit dem in a) gefundenen.

Programmieraufgabe

Aufgabe 1 (3 Punkte) (Backslash)

Der \-Operator in MATLAB implementiert die linke Inverse, respektive das Lösen eines Gleichungssystems $Ax = b$ mittels des Aufrufes `x=A\b`. Für dichtbesetzte Matrizen wird dies z.B. durch eine LR-Zerlegung der Matrix und anschließendes Vorwärts- Rückwärtseinsetzen realisiert. Schreiben sie eine MATLAB- Funktion `x=backslash(A,b)`, sowie jeweils eine Funktion `forwsub`, `backsub` für das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. Die Funktion `backslash` soll das Verhalten von \ nachahmen. Für die LR Zerlegung verwenden Sie die Matlab Funktion `lu`. Weisen Sie die Korrektheit Ihrer Implementierung anhand geeigneter Testbeispiele nach und legen Sie der Lösung ein entsprechendes Demonstrationsscript bei.

Aufgabe 2 (3 Punkte) (Pivotstrategien)

Laden Sie sich von der Vorlesungshomepage[1] das m-file zu `lugui` herunter. Dabei handelt es sich um eine Implementierung der LR-Zerlegung von Cleve Moler[2], die verschiedene Pivotstrategien zulässt und die Wahl des Pivotelementes per grafischer Oberfläche erlaubt.

a) Machen Sie sich mit der Funktionsweise vertraut und schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das für verschiedene Testmatrizen A die LR Zerlegung mit den Pivotstrategien `'diagonal'`,`'partial'`,`'complete'` ausführt und mit den entstehenden Dreiecksmatrizen das Gleichungssystem $Ax = b$ für `b=sum(A,2)` durch Vorwärts- Rückwärtseinsetzen löst. (Hinweis: Verwenden Sie hier \ zum Auflösen der Dreieckssysteme, falls Sie Aufgabe 1 nicht gelöst haben.)

b) Stellen Sie den komponentenweise Fehler in der Lösung für die drei Strategien in einem gemeinsamen Plot grafisch dar. (Versehen Sie die Grafik wieder mit allen nötigen Beschriftungen und einer Legende.)

c) Berechnen Sie die relativen Fehler der berechneten Lösungen.

Verwenden Sie zum Testen die Matrizen:

A_1 :=`pascal(10)`,
A_2 :=`magic(11)`,
A_3 :=`[1 1e-10 ones(1,8); 2 0 randn(1,8);randn(8,10)];`

Zusatz **(freiwillig, ohne Bewertung!)**

Laden Sie sich das MATLAB-Programm `pivotgolf.m` von der Homepage der Numerikvorlesung und machen Sie sich mit diesem Spiel vertraut. Wenn Sie für eine Matrix die Strategie „pick" wählen, können Sie die Pivotelemente selbst bestimmen und es erfolgt eine Punktbewertung. Die Punktzahl 0 bedeutet, dass der geringste Fehler bezüglich des gegebenen Fehlermaßes erreicht wurde.

[1] http://www-user.tu-chemnitz.de/~saak/lehre/Numerik/SS09/index.php?lang=de#uebungen
[2] http://www.mathworks.com/company/aboutus/founders/clevemoler.html