Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 7. Hausaufgabe

Abgabetermin: 27.5./28.5.2009
(in der jeweiligen Übungsgruppe)

Theoretische Aufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte) (LR-Zerlegung)

Wir betrachten Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}. \tag{1}$$

a) Überlegen Sie sich für den Fall $n = 6$, dass die LR-Zerlegung der Matrix A aus (1) bei Verwendung der Spaltenpivotisierung für jedes n ohne Zeilenvertauschung durchgeführt werden kann.

b) Zeigen Sie, dass Matrizen der Form (1) positiv definit sind.

Aufgabe 2 (3 Punkte) (Bandmatrizen)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ (p_A, q_A)- bzw. (p_B, q_B)- Bandmatrizen gemäß Definition 3.29.

a) Zeigen Sie, dass dann

$$C = AB$$

ebenfalls eine (p, q)-Bandmatrix ist und geben sie die Bandbreiten p und q an.

b) Sei $A = LR$ die LR-Zerlegung von A, falls diese existiert. Zeigen Sie, dass dann

- L eine $(p, 0)$-Bandmatrix ist, sowie
- R eine $(0, q)$-Bandmatrix.

(Hinweis: Induktion)

Programmieraufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte) (Cholesky-Zerlegung)

Implementieren Sie die Cholesky-Zerlegung (siehe Aufgabe 1 der Hausaufgabe 6) in MATLAB ohne den Befehl `chol` zu verwenden. Verwenden Sie die Zerlegung zur Lösung der Gleichungssysteme

$$A\,x = b \quad \text{mit } A \text{ aus (1) und } b = \texttt{sum}(\texttt{abs}(A, 2))$$

für $n \in \{3, 5, 7, 9, 11\}$, z.B. mit den Funktionen `forwsub` und `backsub` aus Hausaufgabe 5.

Aufgabe 2 (3 Punkte) (Band-Cholesky-Zerlegung)

a) Leiten Sie mit den Aussagen aus den Aufgaben 1 und 2 im Theorieteil eine optimierte Form der Cholesky Zerlegung von Matrizen der Form (1) her, die nur die benötigten Bänder speichert und berechnet.

b) Programmieren Sie die Methode aus a) und vergleichen Sie diese in geeigneter Form mit Programmieraufgabe 1. Verwenden Sie dazu z.B. Matrizen (1) mit $n = 1000$.

Hinweis: Matrizen der Form (1) können für Dimension m mit der MATLAB-Befehlszeile:

```
A=diag(2*ones(m,1))+diag(-ones(m-1,1),1)+diag(-ones(m-1,1),-1);
```

erzeugt werden.