Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 9. Hausaufgabe

Abgabetermin: 10./11.6.2009
(in der jeweiligen Übungsgruppe)

Theoretische Aufgaben

Aufgabe 1 (3 Punkte) (Normalengleichung)

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ betrachten wir das Ausgleichsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2. \tag{1}$$

a) Unter welcher Bedingung ist die Lösung der Normalengleichung $A^T A\, x = A^T b$ eine Lösung von (1)?

b) An den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ seien die Werte $y_1, y_2, \dots, y_m \in \mathbb{R}$ gegeben. Diese Punkte sollen durch eine Gerade approximiert werden, so dass die Summe der Fehlerquadrate minimiert wird. Stellen Sie die Normalengleichung zum zugehörigen Ausgleichsproblem (vgl. Hausaufgabe 8 Aufgabe 3.b)) auf.

c) Manchmal wird zur Berücksichtigung von Mess(un-)genauigkeiten ein gewichtetes Ausgleichsproblem statt (1) gelöst:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|W\,(Ax - b)\|_2, \quad W = \operatorname{diag}(w_i), \quad w_i > 0, \quad i = 1, \dots, m. \tag{2}$$

Wie lauten die Normalengleichungen zu diesem Problem?

Aufgabe 2 (5 Punkte) (Iterative Gleichungssystemlöser: Splitting-Verfahren)

Splitting-Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme basieren auf einer Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ der Form $A = B + (A - B)$ für eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Damit lässt sich ein Gleichungssystem $Ax = b$ äquivalent schreiben als $Bx = (B - A)x + b$ bzw. $x = B^{-1}(B - A)x + B^{-1}b$. Letztere Gleichung motiviert Iterationsverfahren der Form

$$x_{m+1} = \phi(x_m, b) = Mx_m + Nb \qquad \text{für } m = 0, 1, \dots$$

mit $M := B^{-1}(B - A)$ und $N := B^{-1}$.

a) Ein Iterationsverfahren ϕ heißt konsistent zur Matrix A falls für alle $b \in \mathbb{R}^n$, $A^{-1}b$ ein Fixpunkt von ϕ zu b ist. Zeigen Sie, dass Splitting-Verfahren genau dann konsistent zu A sind, wenn $M = I - NA$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für den Spektralradius von M gilt $\varrho(M) < 1$, wenn die Folge der x_m und damit das Verfahren ϕ für jeden Startwert x_0 konvergiert.
Zusatz: Zeigen Sie, dass auch die entgegengesetzt Richtung "$\varrho(M) < 1 \Rightarrow \phi$ konvergiert" gilt. Verwenden Sie dazu ohne Beweis: $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \|.\| \ :\ \|M\| \le \varrho(M) + \varepsilon$ (3 Punkte)

c) Schreibt man die Splitting-Verfahren in der Form

$$x_{m+1} = x_m + B^{-1}(b - Ax_m) = x_m + B^{-1}r_m,$$

so kann man mit dem Ziel der Konvergenzbeschleunigung den Korrekturvektor r_m über einen Faktor $\mathbb{R} \ni \omega > 0$ gewichten, indem die modifizierte Iteration

$$x_{m+1} = x_m + \omega B(\omega)^{-1}(b - Ax_m)$$

betrachtet wird. Für $\omega < 1$ spricht man dann von Unterrelaxationsverfahren und für $\omega > 1$ von Überrelaxationsverfahren. Ist es möglich ω optimal zu wählen? Wie?

Programmieraufgaben

Aufgabe 1 (5 Punkte) (Iterative Gleichungssystemlöser: Splitting-Verfahren II)

Zwei einfache Vertreter der Splitting-Verfahren sind das Jacobi-Verfahren und das Gauß-Seidel-Verfahren. Diese beruhen auf der Zerlegung der Matrix A in das strikte untere Dreieck L, die Diagonale D und die strikte obere Dreiecksmatrix R, also $A = L + D + R$. Im Fall des Jacobi-Verfahren wählt man dann $B = D$, beim Gauß-Seidel-Verfahren $B = L + D$.

a) Programmieren Sie die Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren als MATLAB-Funktionen.

b) Leiten Sie gemäß Aufgabe 2 im Theorieteil die zugehörigen relaxierten Verfahren her.
Hinweis: Im Fall des Gauß-Seidel Verfahrens ist es essentiell zeilenweise die Komponentenschreibweise zu betrachten, da sonst die Wirkung von ω auf B nicht erfasst wird.

c) Programmieren Sie auch die relaxierten Verfahren.

Testen und Vergleichen Sie die Verfahren insbesondere für verschiedene Parameter ω im Fall der Relaxationsverfahren. Verwenden Sie dazu z.B. die Matrix A aus Hausaufgabe 7 Aufgabe 1.

Aufgabe 2 (3 Punkte) (Iterative Gleichungssystemlöser: Splitting-Verfahren III)

Plotten Sie für die Matrix A aus Hausaufgabe 7 Aufgabe 1 und $\omega \in [0, 2]$ den Verlauf des Spektralradius von $M_{GS}(\omega)$, also der Matrix M aus dem relaxierten Gauß-Seidel-Verfahren. Vergleichen Sie dabei insbesondere verschiedene Dimensionen n, z.B. $n = 10, 100, 250$. Was erkennen und beobachten Sie?