Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

# Numerische Mathematik– 11. Übung

### Aufgabe 1 (Quasi-Newton-Verfahren)

Ausgehend von einer Approximation $A_0$ an die Jacobi-Matrix $DF(x_0)$ wird eine Folge von Approximationen konstruiert, die der Sekantenbedingung

$$A_{k+1}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})$$

genügen soll.

a) Untersuchen Sie, wie im Fall von Rang-1-Korrekturen $A_{k+1} = A_k + u^{(k)}\, {v^{(k)}}^\top$ die Vektoren $v^{(k)}$ und $u^{(k)}$ zu wählen sind.

b) Fordert man als zusätzliche Bedingung

$$(A_{k+1} - A_k)\, s = 0 \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}^n \text{ mit } s^\top (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0$$

soll erhält man das Rang-1-Verfahren von Broyden. Geben Sie eine Vorschrift zur Bildung von $A_{k+1}$ an.

c) Zeigen Sie, dass das Rang-1-Verfahren von Broyden eine Best-Approximation im Sinne der Spektral-Norm liefert.

### Aufgabe 2 (Update der $QR$-Zerlegung)

Zur Durchführung des Rang-1-Verfahrens von Broyden benötigt man nur eine zusätzliche Funktionsauswertung. Kann nun noch die anschließende Lösung des Gleichungssystems

$$A_k\, d^{(k)} = -f(x^{(k)})$$

effizient umgesetzt werden, so hat man gegenüber dem Newton-Verfahren einiges an Rechenzeit eingespart. Eine Möglichkeit dieses Gleichungssystem effizient zu lösen besteht darin, eine existierende $LR$- oder $QR$-Zerlegung aufzudatieren. Konstruieren Sie ausgehend von einer $QR$-Zerlegung der Matrix $A$, $A = Q\,R$, eine $QR$-Zerlegung der Matrix $A_+ = A + u\,v^\top$.