

## Numerische Mathematik– 2. Übung

### Aufgabe 1

Geben Sie alle nichtnegativen Zahlen an, die sich in  $\mathbb{M}(3, 2, -1, 2)$  darstellen lassen.

### Aufgabe 2

Berechnen Sie die kleinere der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung  $x^2 - 2ax + b = 0$  für  $a = 0.9$ ,  $b = 0.0001$  unter der Annahme einer vierstelligen Mantisse zur Basis 10. Bestimmen Sie den relativen Fehler für folgende Lösungsvarianten:

1.  $x_1 = a - \sqrt{a^2 - b}$ ,
2.  $x_2 = a + \sqrt{a^2 - b}$ ,  $x_1 = \frac{b}{x_2}$ .

### Aufgabe 3

Bekanntlich kann zur numerischen Approximation der Ableitung einer Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an einer Stelle  $x_0$  der Differenzenquotient

$$f'(x) \Big|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

verwendet werden. Untersuchen Sie den relativen Fehler

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| / |f'(x_0)|$$

dieser Näherung in Abhängigkeit von  $h \rightarrow 0$  für die Funktionen

1.  $\sin(x)$  an der Stelle  $x_0 = 0$  und
2.  $\exp(x)$  an der Stelle  $x_0 = 1$ .

Was beobachten Sie dabei?

### Aufgabe 4

Was versteht man unter einer induzierten Matrixnorm? Geben sie allgemein die Definition einer induzierten Matrixnorm an, sowie eine Vorschrift zur Auswertung für folgende Normen:

1.  $\|A\|_1$ ,
2.  $\|A\|_\infty$ ,
3.  $\|A\|_2$ ,
4.  $\|A\|_F$ .

### Aufgabe 5

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichungen nach:

1.  $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$
2.  $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$ .