

Numerische Mathematik– 2. Übung

Aufgabe 1

Geben Sie alle nichtnegativen Zahlen an, die sich in $\mathbb{M}(3, 2, -1, 2)$ darstellen lassen.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die kleinere der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 2ax + b = 0$ für $a = 0.9$, $b = 0.0001$ unter der Annahme einer vierstelligen Mantisse zur Basis 10. Bestimmen Sie den relativen Fehler für folgende Lösungsvarianten:

1. $x_1 = a - \sqrt{a^2 - b}$,
2. $x_2 = a + \sqrt{a^2 - b}$, $x_1 = \frac{b}{x_2}$.

Aufgabe 3

Bekanntlich kann zur numerischen Approximation der Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle x_0 der Differenzenquotient

$$f'(x) \Big|_{x=x_0} \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

verwendet werden. Untersuchen Sie den relativen Fehler

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| / |f'(x_0)|$$

dieser Näherung in Abhängigkeit von $h \rightarrow 0$ für die Funktionen

1. $\sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ und
2. $\exp(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Was beobachten Sie dabei?

Aufgabe 4

Was versteht man unter einer induzierten Matrixnorm? Geben sie allgemein die Definition einer induzierten Matrixnorm an, sowie eine Vorschrift zur Auswertung für folgende Normen:

1. $\|A\|_1$,
2. $\|A\|_\infty$,
3. $\|A\|_2$,
4. $\|A\|_F$.

Aufgabe 5

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Ungleichungen nach:

1. $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$
2. $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$.