Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 6. Übung

Aufgabe 1

Unter *Zeilenskalierung* wird die Multiplikation eines Gleichungssystems mit einer Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}\{d_i\}$ von links verstanden:

$$A\,x = b \quad \to \quad D\,A\,x = D\,b.$$

Die Skalierung wird durchgeführt mit dem Ziel der Verkleinerung der Konditionszahl ($\kappa(DA) \leq \kappa(A)$) bzw. der Verbesserung der numerischen Eigenschaften des Gleichungssystems in Bezug auf die Fortpflanzung der Dateneingangsfehler ΔA und Δb.
Zeilenäquilibrierung ist eine spezielle Form der Zeilenskalierung, bei der

$$d_i = \frac{\|A\|_\infty}{\sum\limits_j |a_{ij}|}$$

gewählt wird.
Sei ab jetzt A eine reguläre $n \times n$-Matrix und D die Diagonalmatrix für die Zeilenäquilibrierung. Zeigen Sie die Beziehungen

a) $\|A\|_\infty = \|DA\|_\infty$,

b) $(\max\limits_i d_i)^{-1}\left\|A^{-1}\right\|_\infty \leq \left\|(DA)^{-1}\right\|_\infty \leq \left\|A^{-1}\right\|_\infty$ und

c) $(\max\limits_i d_i)^{-1}\kappa_\infty(A) \leq \kappa_\infty(DA) \leq \kappa_\infty(A)$.

Zeigen Sie weiter, dass für eine beliebige Diagonalmatrix $C = \operatorname{diag}\{c_i\}$

d) $\kappa_\infty(DA) \leq \kappa_\infty(CA)$

gilt. Insbesondere liefert also die Zeilenäquilibrierung die kleinste Konditionszahl (in der $\|\,.\,\|_\infty$-Norm).

Aufgabe 2

Als *Givens-Rotation* (Givens 1953) bezeichnet man Matrizen der Form:

$$G = G(k,l) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & c & & s & \\ & & I & & \\ & -s & & c & \\ & & & & I \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow\; k \\ \\ \leftarrow\; l \\ \\ \end{array} \quad \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

wobei I jeweils Einheitsmatrizen der passenden Dimension sind und $s^2 + c^2 = 1$ gilt. Hier sollen s und c an $\sin(\Theta)$ und $\cos(\Theta)$ erinnern. Zeigen Sie:

a) $G(k,l)$ ist orthogonal.

b) $G(k,l)$ beschreibt für $s = \sin(\Theta)$ und $c = \cos(\Theta)$ eine Drehung um den Winkel Θ (entgegen dem Uhrzeigersinn) in der (k,l)-Ebene.

c) Multipliziert man A mit $G(k,l)$ von links so ändern sich nur die Zeilen k und l. Wann ist dies besonders günstig?

d) $G(k,l)$ kann verwendet werden um eine Komponente x_l bei Anwendung auf $x \in \mathbb{R}^n$ zu eliminieren. Wie sind s und c dann zu wählen?