Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik
Professur Mathematik in Industrie und Technik

Sommersemester 2009
Prof. Dr. Peter Benner
Dipl.-Math. Jens Saak
Dipl.-Ing. Martin Bernauer

Numerische Mathematik– 8. Übung

Aufgabe 1

Als *Givens-Rotation* (Givens 1953) bezeichnet man Matrizen der Form:

$$G = G(k,l) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I & & & & \\ & c & & s & \\ & & I & & \\ & -s & & c & \\ & & & & I \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \; k \\ \\ \leftarrow \; l \\ \\ \end{array} \quad \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

wobei I jeweils Einheitsmatrizen der passenden Dimension sind und $s^2 + c^2 = 1$ gilt. Hier sollen s und c an $\sin(\Theta)$ und $\cos(\Theta)$ erinnern. Zeigen Sie:

a) $G(k,l)$ ist orthogonal.

b) $G(k,l)$ beschreibt für $s = \sin(\Theta)$ und $c = \cos(\Theta)$ eine Drehung um den Winkel Θ (entgegen dem Uhrzeigersinn) in der (k,l)-Ebene.

c) Multipliziert man A mit $G(k,l)$ von links so ändern sich nur die Zeilen k und l. Wann ist dies besonders günstig?

d) $G(k,l)$ kann verwendet werden um eine Komponente x_l bei Anwendung auf $x \in \mathbb{R}^n$ zu eliminieren. Wie sind s und c dann zu wählen?

Aufgabe 2

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ und $\operatorname{Rang} A = n$. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} I & A \\ A^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

genau eine Lösung s hat, wobei x den Ausdruck $\|Ax - b\|_2$ minimiert.
Geben Sie einen Algorithmus an, durch den eine höhere Genauigkeit für die Lösung des LLS-Problems

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$$

erzielt werden kann.