

Chemnitz, 19. März 2012

# AG Simulation und Parametrierung

## Bericht TP A06

Dr. Jens Saak

SFB/Transregio 96  
2. Mitgliederversammlung (Chemnitz 2012)

## Gliederung

- 1 Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens
  - Das System
  - Gramsche Matrizen und Lyapunov Gleichungen
  - Realisierungen und Balancierung
  - Grundidee Modellordnungsreduktion
  - Zusammenfassung und Implementierung im SR Algorithmus
  - Übertragungsfunktion und Fehlerschranke
- 2 Numerische Ergebnisse: Ständer (TP A05)
- 3 Weitere Berichte
- 4 Ausblick
- 5 Kooperation

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Das System

Wir betrachten das

lineare zeitinvariante (LTI) System

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (\Sigma(E; A, B, C))$$

mit

- $x \in \mathbb{R}^n$  Zustand,
- $u \in \mathbb{R}^m$  Eingang, bzw. Steuerung,
- $y \in \mathbb{R}^p$  Ausgang, bzw. Messung,

und

$$E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}.$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Das System

Wir betrachten das

lineare zeitinvariante (LTI) System

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (\Sigma(E; A, B, C))$$

Im Kontext “FEM für die Wärmeleitung”:

- $E$  FEM Massematrix,
- $A$  diskreter Ortsdifferentialoperator,
- $x$  Temperaturen in den FEM Freiheitsgraden.

Im Folgenden zunächst  $E = I$  (sonst betrachte  $\hat{A} := E^{-1}A$ ,  $\hat{B} := E^{-1}B$ ).

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Gramsche Matrizen und Lyapunov Gleichungen

Die unendlichen Erreichbarkeits- und Beobachtbarkeits-Gramschen zu  $\Sigma$

$$P = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad \text{und} \quad Q = \int_0^{\infty} e^{A\tau} C^T C e^{A^T \tau} d\tau$$

werden abgeleitet aus

- Eingangs-zu-Zustands Abbildung:  $\xi(t) = e^{At} B$  und
- Zustand-zu-Ausgangs Abbildung:  $\eta(t) = C e^{At}$ .

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Gramsche Matrizen und Lyapunov Gleichungen

Die unendlichen Erreichbarkeits- und Beobachtbarkeits-Gramschen zu  $\Sigma$

$$P = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad \text{und} \quad Q = \int_0^{\infty} e^{A\tau} C^T C e^{A^T \tau} d\tau$$

erfüllen

$$\text{Bild}(P) = \text{Erreichbarkeitsmenge zu } (A, B)$$

und

$$\text{Bild}(Q) = \text{Rekonstruierbarkeitsmenge zu } (C, A).$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Gramsche Matrizen und Lyapunov Gleichungen

Die unendlichen Erreichbarkeits- und Beobachtbarkeits-Gramschen zu  $\Sigma$

$$P = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad \text{und} \quad Q = \int_0^{\infty} e^{A\tau} C^T C e^{A^T \tau} d\tau$$

- minimal nötige Eingangsenergie, um  $\Sigma$  asymptotisch von 0 nach  $x_e$  zu bringen ist  $x_e^T P^{-1} x_e$ .
- die maximale von  $x_o$  erzeugte Ausgangsenergie auf einem unendlichen Beobachtungshorizont ist  $x_o^T Q x_o$ .

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Gramsche Matrizen und Lyapunov Gleichungen

Die unendlichen Erreichbarkeits- und Beobachtbarkeits-Gramschen zu  $\Sigma$

$$P = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad \text{und} \quad Q = \int_0^{\infty} e^{A\tau} C^T C e^{A^T \tau} d\tau$$

lösen die zwei Lyapunovgleichungen:

$$AP + PA^T = -BB^T,$$

$$A^T Q + QA = -C^T C.$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Gramsche Matrizen und Lyapunov Gleichungen

Die unendlichen Erreichbarkeits- und Beobachtbarkeits-Gramschen zu  $\Sigma$

$$P = \int_0^{\infty} e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad \text{und} \quad Q = \int_0^{\infty} e^{A\tau} C^T C e^{A^T \tau} d\tau$$

lösen die zwei Lyapunovgleichungen:

$$A P E^T + E P A^T = -B B^T,$$

$$A^T Q E + E^T Q A = -C^T C.$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Realisierungen und Balancierung

### Definition

Sätze von Matrizen  $E, A, B, C$  mit identischem I/O-Verhalten heißen **Realisierungen**  $\Sigma(E; A, B, C)$  des Systems.

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Realisierungen und Balancierung

#### Definition

Sätze von Matrizen  $E, A, B, C$  mit identischem I/O-Verhalten heißen **Realisierungen**  $\Sigma(E; A, B, C)$  des Systems.

#### Definition

Die Eigenwerte von  $PEQE^T$  sind Invarianten des Systems. Ihre Quadratwurzeln heißen **Hankel Singulärwerte (HSV)** von  $\Sigma$ .

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Realisierungen und Balancierung

#### Definition

Sätze von Matrizen  $E, A, B, C$  mit identischem I/O-Verhalten heißen **Realisierungen**  $\Sigma(E; A, B, C)$  des Systems.

#### Definition

Die Eigenwerte von  $PEQE^T$  sind Invarianten des Systems. Ihre Quadratwurzeln heißen **Hankel Singulärwerte (HSV)** von  $\Sigma$ .

#### Definition

Eine Realisierung  $\Sigma(E; A, B, C)$  heißt **balanciert**, falls gilt

$$P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Realisierungen und Balancierung

### Definition

Sätze v  
heißen

balancierte Realisierung  $\rightsquigarrow$

- Zustände gleichzeitig gut steuerbar und beobachtbar,
- bzw. Zustände die viel Eingangsenergie benötigen, erzeugen wenig Ausgangsenergie,
- Idee des balancierten Abschneidens: Beschränkung auf dominante HSV.

### Definition

Die Eig  
Quadra

### Definition

Eine Realisierung  $\Sigma(E; A, B, C)$  heißt **balanciert**, falls gilt

$$P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n).$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Grundidee Modellordnungsreduktion

LTI System  $\Sigma = (E; A, B, C)$ :

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y(t) = C x(t)$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Grundidee Modellordnungsreduktion

LTI System  $\Sigma = (E; A, B, C)$ :

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y(t) = C x(t)$$

### Modellordnungsreduktion

Finde Projektionsmatrizen

$$V \in \mathbb{R}^{n \times k} \text{ and } W \in \mathbb{R}^{n \times k},$$

$$k \ll n.$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Grundidee Modellordnungsreduktion

LTI System  $\Sigma = (E; A, B, C)$ :

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y(t) = C x(t)$$

### Modellordnungsreduktion

Finde Projektionsmatrizen

$$V \in \mathbb{R}^{n \times k} \text{ and } W \in \mathbb{R}^{n \times k},$$

$$k \ll n.$$

$$W^T E V \dot{\tilde{x}}(t) = W^T A V \tilde{x}(t) + W^T B u(t), \quad \tilde{y}(t) = C V$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Grundidee Modellordnungsreduktion

LTI System  $\Sigma = (E; A, B, C)$ :

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y(t) = C x(t)$$

### Modellordnungsreduktion

Finde Projektionsmatrizen

$$V \in \mathbb{R}^{n \times k} \text{ and } W \in \mathbb{R}^{n \times k},$$

$$k \ll n.$$

$$\tilde{E} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t), \quad \tilde{y}(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t)$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Grundidee Modellordnungsreduktion

LTI System  $\Sigma = (E; A, B, C)$ :

$$E \dot{x}(t) = A x(t) + B u(t), \quad y(t) = C x(t)$$

### Modellordnungsreduktion

Finde Projektionsmatrizen

$$V \in \mathbb{R}^{n \times k} \text{ and } W \in \mathbb{R}^{n \times k},$$

$$k \ll n.$$

$$\tilde{E} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A} \tilde{x}(t) + \tilde{B} u(t), \quad \tilde{y}(t) = \tilde{C} \tilde{x}(t)$$

Ziel:  $\tilde{y}(t) \approx y(t)$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens

### Zusammenfassung und Implementierung im SR Algorithmus

#### Zusammenfassung:

- $\Sigma(E; A, B, C)$ , heißt **balanciert**, falls die Lösungen  $P, Q$  der Lyapunovgleichungen

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^T Q + QA + C^T C = 0,$$

$P = Q = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$  erfüllen.

- $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  sind die **Hankel Singulärwerte** von  $\Sigma$ .
- Balancierte Realisierung durch **Zustandsraumtransformation**

$$\begin{aligned} T : (E; A, B, C) &\mapsto (TET^{-1}; TAT^{-1}, TB, CT^{-1}) \\ &= \left( \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

- Abschneiden  $\rightsquigarrow$  reduziertes Modell:  $(\tilde{E}; \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) = (E_{11}; A_{11}, B_1, C_1)$ .

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Zusammenfassung und Implementierung im SR Algorithmus

### Implementierung: SR Methode

- 1 Berechne (Cholesky-)Faktoren der Lösungen der Lyapunovgleichungen,

$$P = S^T S, \quad Q = R^T R.$$

- 2 Berechne Singulärwertzerlegung

$$SER^T = [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}.$$

- 3 Definiere

$$W := R^T V_1 \Sigma_1^{-1/2}, \quad V := S^T U_1 \Sigma_1^{-1/2}.$$

- 4 Das reduzierte Modell ist:  $(W^T A V, W^T B, C V)$ .

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Übertragungsfunktion und Fehlerschranke

Laplace-Transformation des Systems  $\Sigma(E; A, B, C)$  liefert die

Übertragungsfunktion

$$G(\sigma) = C(A - \sigma E)^{-1}B.$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Übertragungsfunktion und Fehlerschranke

Laplace-Transformation des Systems  $\Sigma(E; A, B, C)$  liefert die

Übertragungsfunktion

$$G(\sigma) = C(A - \sigma E)^{-1}B.$$

Damit zeigt man die

Fehlerschranke

$$\|G - \tilde{G}_k\| \leq 2 \sum_{i=k+1}^n \sigma_i.$$

reduziertes Modell der Ordnung  $k$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Übertragungsfunktion und Fehlerschranke

Laplace-Transformation des Systems  $\Sigma(E; A, B, C)$  liefert die

Übertragungsfunktion

$$G(\sigma) = C(A - \sigma E)^{-1}B.$$

Damit zeigt man die

Fehlerschranke

$$\|G - \tilde{G}_k\| \leq 2 \sum_{i=k+1}^n \sigma_i = 2 \operatorname{Spur}(\Sigma_2).$$

## Modellordnungsreduktion mittels balancierten Abschneidens Übertragungsfunktion und Fehlerschranke

Laplace-Transformation des Systems  $\Sigma(E; A, B, C)$  liefert die

Übertragungsfunktion

$$G(\sigma) = C(A - \sigma E)^{-1}B.$$

Damit zeigt man die

Fehlerschranke

$$\|G - \tilde{G}_k\| \leq 2 \sum_{i=k+1}^n \sigma_i.$$

Es gilt insbesondere:  $\|y - \tilde{y}\| \leq 2 \left( \sum_{i=k+1}^n \sigma_i \right) \|u\|$

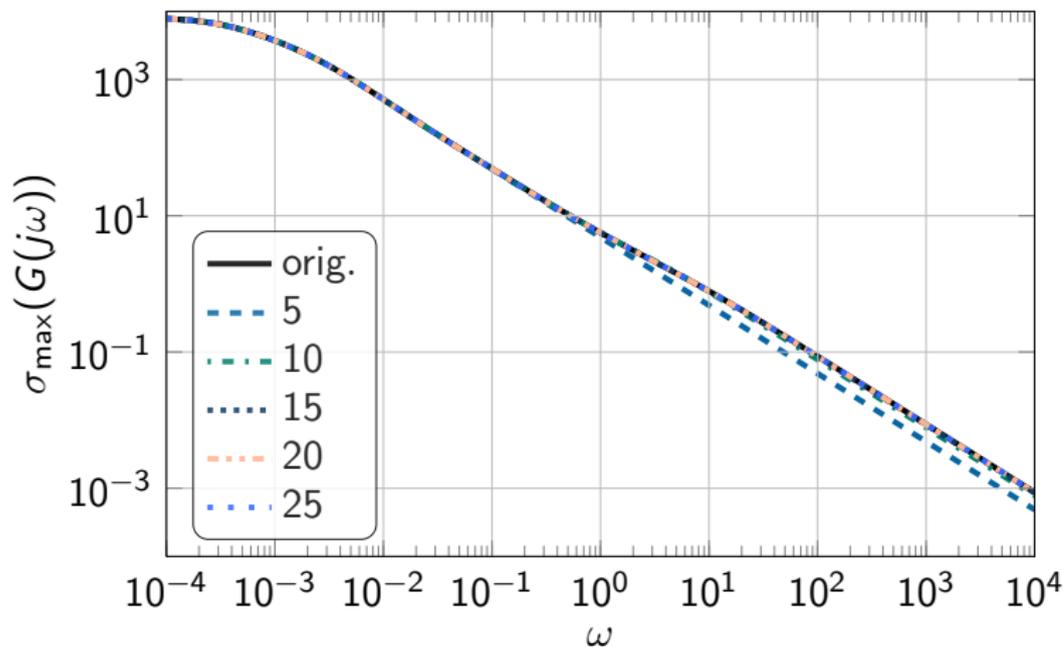
## Numerische Ergebnisse: Ständer (TP A05)

- ANSYS FEM Semidiskretisierung:
  - DOFs: 16626
  - Eingänge: 20
  - Ausgänge: unklar  
(hier:  $1 \hat{=} \text{Durchschnittstemperatur}$ )
- Modell wie im Vortrag von A. Galant auf dem 1. Kolloquium.
- Daten aus TP A05.



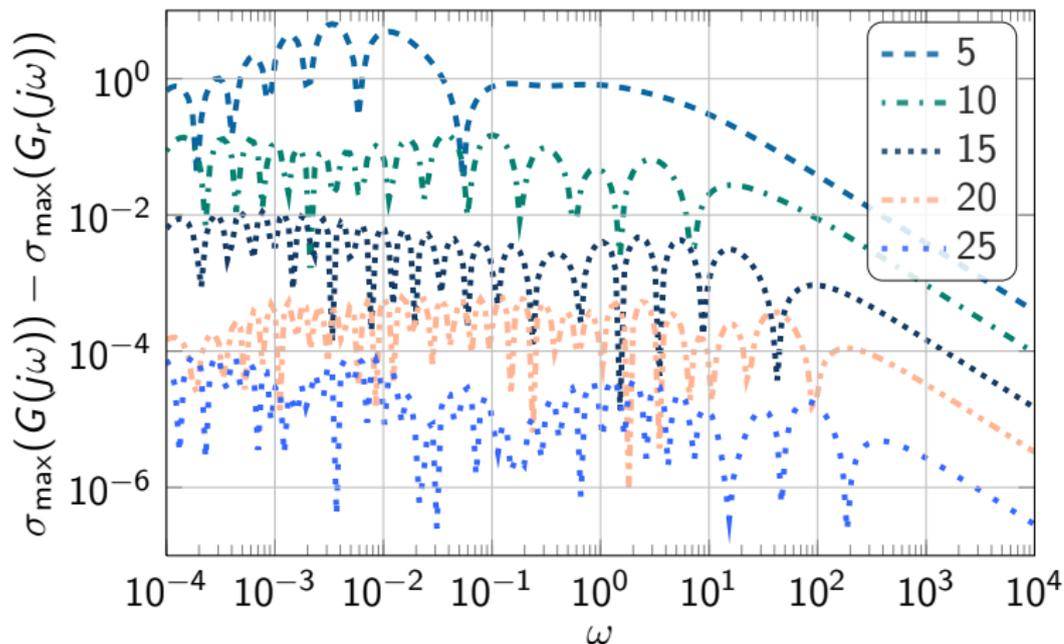
## Numerische Ergebnisse: Ständer (TP A05)

Übertragungsfunktion für volles und div. reduzierte Systeme



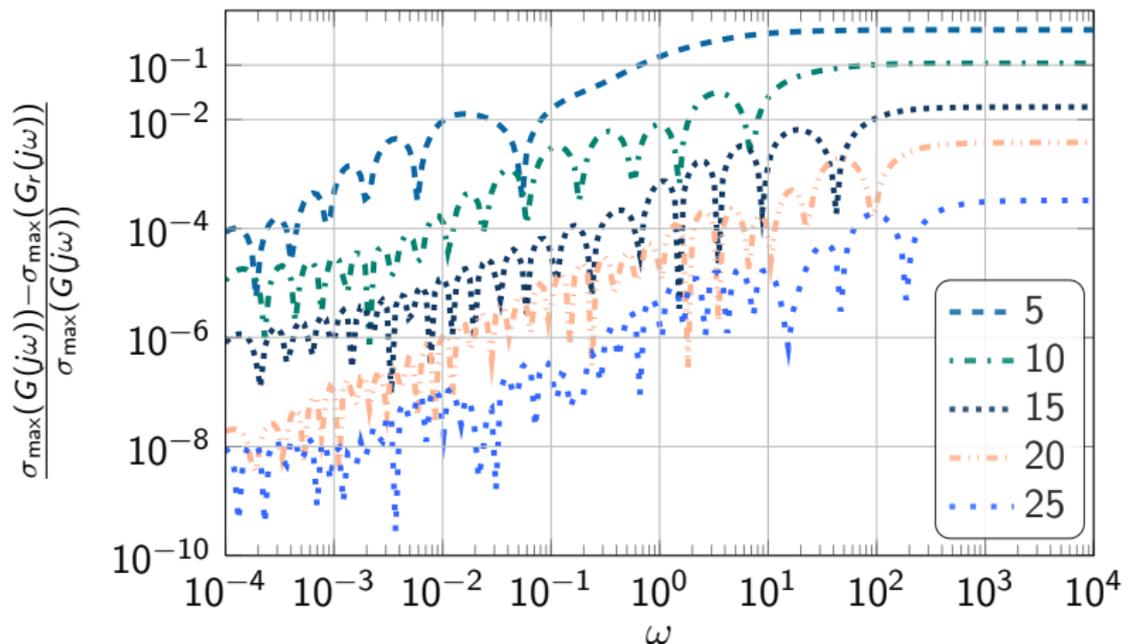
## Numerische Ergebnisse: Ständer (TP A05)

absoluter Abschneidefehler



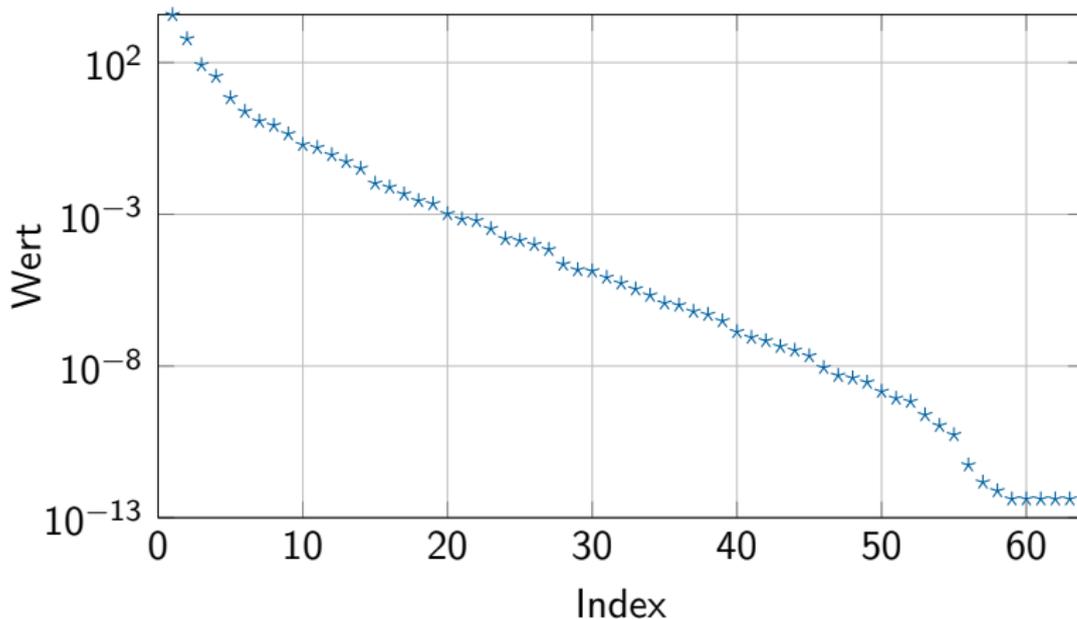
## Numerische Ergebnisse: Ständer (TP A05)

relativer Abschneidefehler



## Numerische Ergebnisse: Ständer (TP A05)

### Berechnete Hankel Singulärwerte



## Weitere Berichte

### Personal

- Dipl.-Math. techn. Julia Müller als wissensch. Hilfskraft (Einstellung: 1.2.2012 zunächst für 6 Monate)

### Inhaltliche Fortschritte

- Wärmeleitung auf Ständer (Daten A05)
- CADFEM Model Reduction Challenges
- Datentransfer FEM  $\rightsquigarrow$  *MATLAB*<sup>®</sup> via SDTools/FEMlink
- evtl. dazu auch Kooperation Morembs  
(Uni Stuttgart ITM (Prof. P. Eberhard))

## Ausblick

### Anstehende Aufgaben für die kommenden 6 Monate

- CADFEM Model Reduction Challenges
- Datentransfer FEM  $\rightsquigarrow$  *MATLAB* via SDTools/FEMlink
- evtl. dazu auch Kooperation Morembs  
(Uni Stuttgart ITM (Prof. P. Eberhardt))
- parametrische Modellreduktion für den Ständer
- MOR für zeitdiskrete Übertragungsfunktionen (B06)

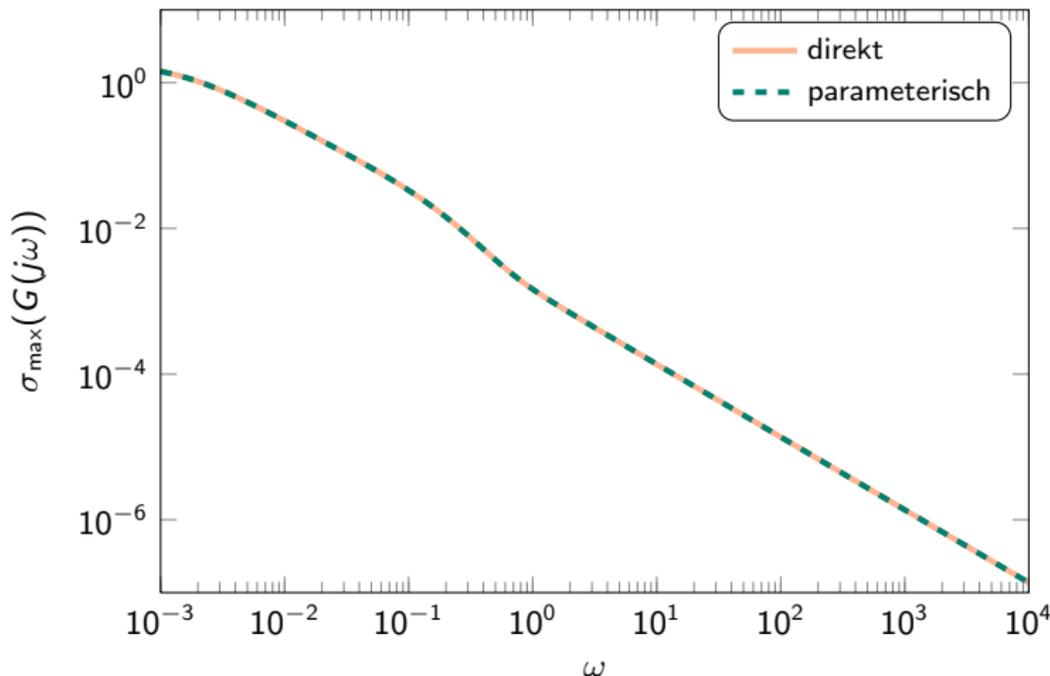
## Ausblick

### Anstehende Aufgaben für die kommenden 6 Monate

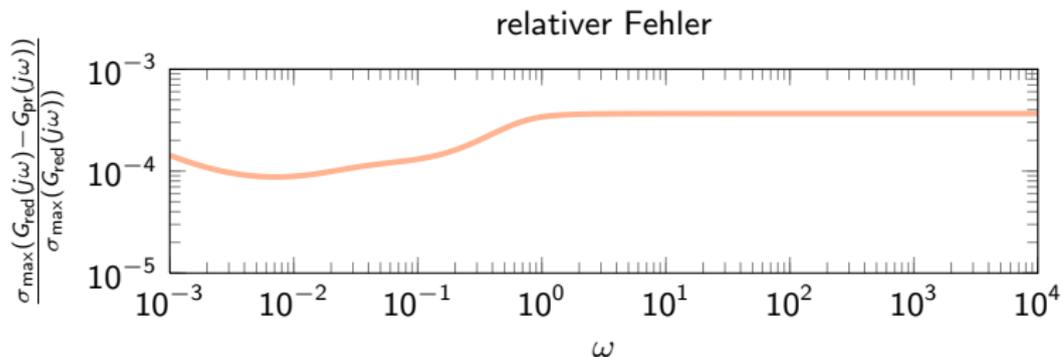
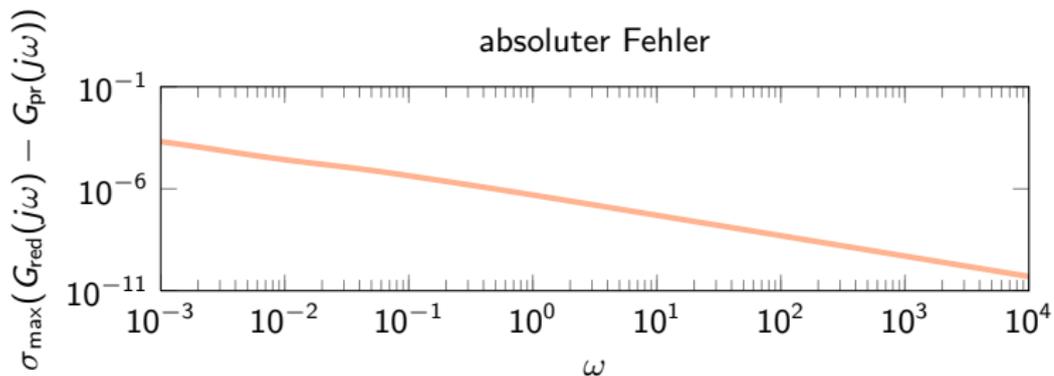
- CADFEM Model Reduction Challenges
- Datentransfer FEM  $\leftrightarrow$  *MATLAB* via SDTools/FEMlink
- evtl. dazu auch Kooperation Morembs  
(Uni Stuttgart ITM (Prof. P. Eberhardt))
- parametrische Modellreduktion für den Ständer
- MOR für zeitdiskrete Übertragungsfunktionen (B06)

## Ausblick

Übertragungsfunktionen von direkt und parameterisch reduziertem System



## Ausblick



## Ausblick

### Anstehende Aufgaben für die kommenden 6 Monate

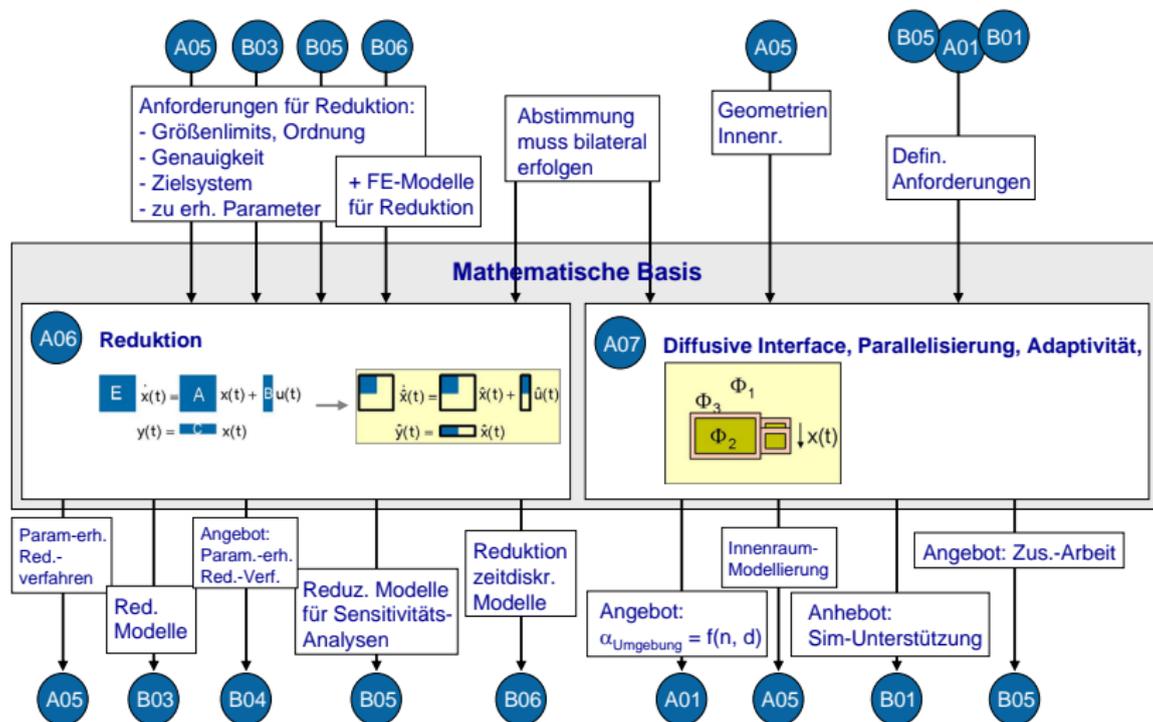
- CADFEM Model Reduction Challenges
- Datentransfer FEM  $\leftrightarrow$  *MATLAB* via SDTools/FEMlink
- evtl. dazu auch Kooperation Morembs  
(Uni Stuttgart ITM (Prof. P. Eberhardt))
- parametrische Modellreduktion für den Ständer
- MOR für zeitdiskrete Übertragungsfunktionen (B06)

## Ausblick

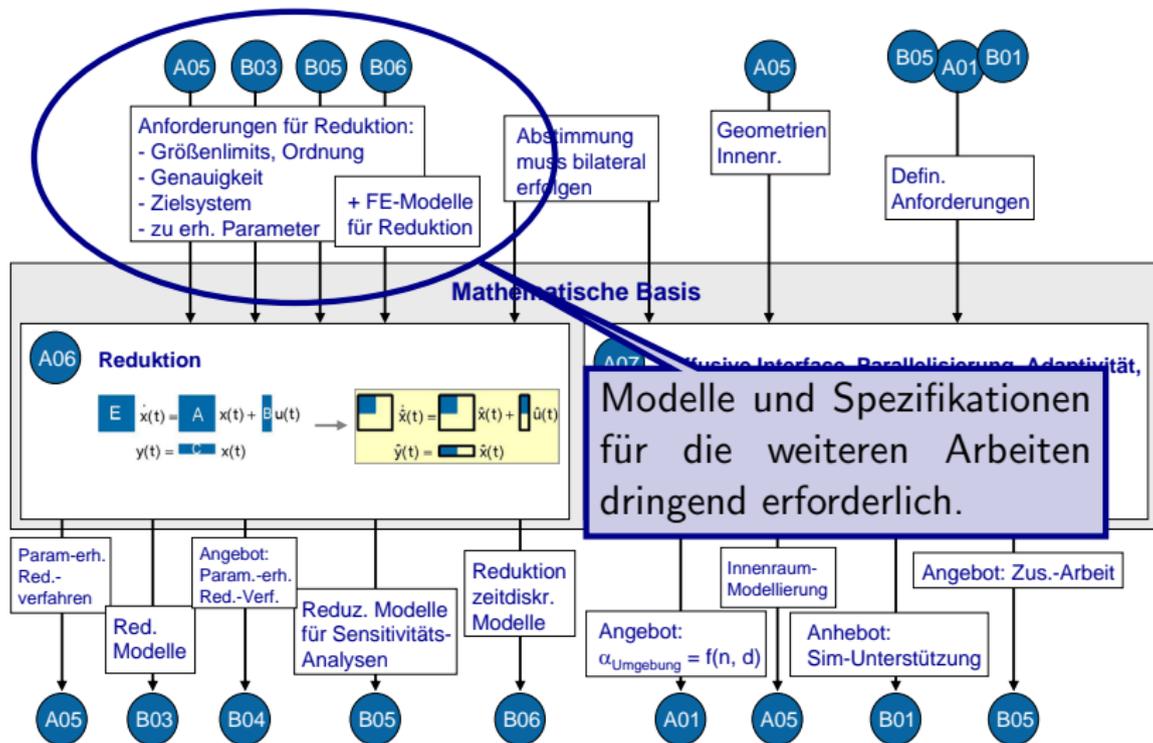
### Anstehende Aufgaben für die kommenden 6 Monate

- CADFEM Model Reduction Challenges
- Datentransfer FEM  $\leftrightarrow$  *MATLAB* via SDTools/FEMlink
- evtl. dazu auch Kooperation Morembs  
(Uni Stuttgart ITM (Prof. P. Eberhardt))
- parametrische Modellreduktion für den Ständer
- MOR für zeitdiskrete Übertragungsfunktionen (B06)

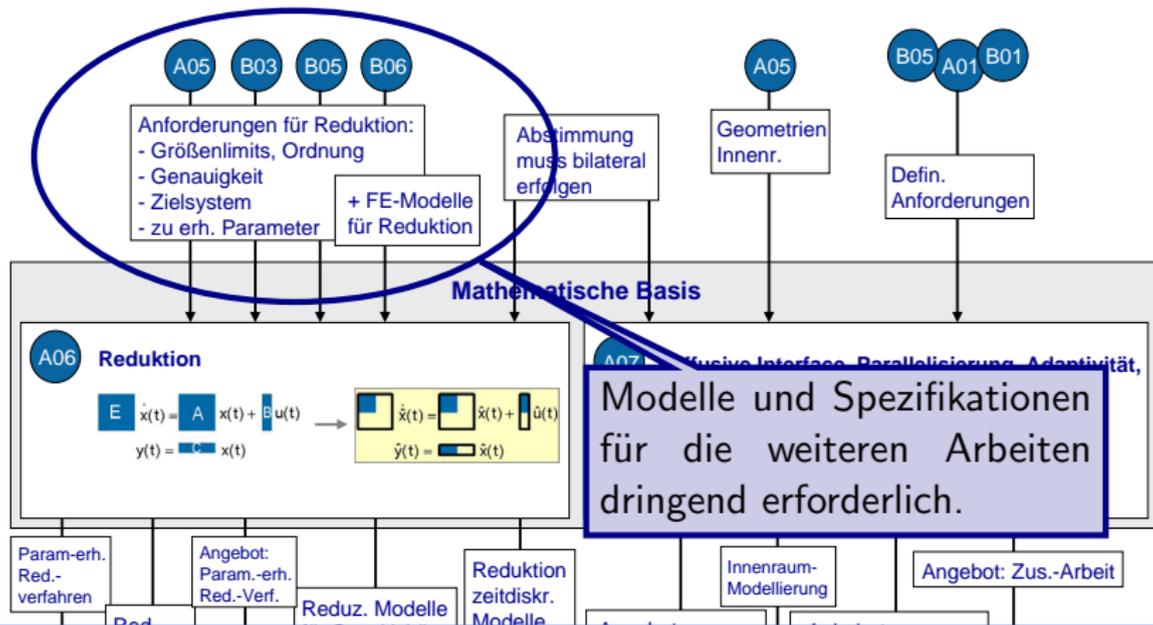
## Kooperation



# Kooperation



# Kooperation



Modelle und Spezifikationen für die weiteren Arbeiten dringend erforderlich.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!